杨辉三角vs莱布尼茨三角

小圆滚滚

1 调和数

「调和数」是毕达哥拉斯学派从琴弦长度的研究上发现的一种数量关系。他们发现，一根拉紧的琴弦（ 1倍长的琴弦）如果弹出某个音调，比如说是do，那么取其 1/2弦长，弹出的音调就是高八度的do，取其2/3 弦长，就会弹出高五度的so。

那么，这些和谐的数究竟有什么奇妙的特征呢？注意到

$\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:1=3:4:6$

它们的倒数刚好构成等差数列：

2,$\frac{3}{2}$,1以及$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{6}$,也就是说：如果一个数列各项取倒数后成等差数列，那么原数列就称为调和数列，即和谐的一列数。

对应2，1.5，1的差0.5；0.33，0.25，0.17的差1/12=0.8

明白了这一点，我们应该不会对调和平均数（harmonic mean）的称呼感到讶异了，因为p,q与其调和平均数$H=\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$,这三个数的倒数，正是构成了一个等差数列：$\frac{1}{p}$,$\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{2}$,$\frac{1}{p}$，于是p,H,q就构成了一个调和数列，居中的那个数就称为左右两数的调和平均数。同样地，我们也不会对调和级数（harmonic series）的名称感到困惑了，回顾一下，调和级数事实上是数列：$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$的和。这个数列各项的倒数1,2,3,...显然就是等差数列，于是它们$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$也就构成了一个调和数列。

2 调和级数

调和级数是各项倒数为等差数列的级数，通常指项级数

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

各项倒数所成的数列（不改变次序）为等差数列。从第2项起，它的每一项是前后相邻两项的调和平均，故名调和级数。

推而广之，具有这种性质的每一个级数，即形如

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a+nd}$

的级数也称为调和级数，其中 a,d 是常数. 调和级数是发散的，但其部分和

$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$增长极慢。

3 调和平均

调和平均数的含义

所有数字的倒数的算术平均数的倒数。

这个听起来像绕口令一样的定义拆成三步就很简单了：

1. 所有数字取倒数
2. 计算这些倒数的算术平均数
3. 对上一步的计算结果取倒数

例： $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$
$\frac{1}{\frac{3+7}{2}} = \frac{1}{5}$可以得到3和7的调和平均数。

4 杨辉三角

如下：

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
\cdots\cdots
\end{array}
$$

5 莱布尼茨三角

如下：

$$
\begin{array}{c}
\frac{1}{1} \\
\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\
\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \\
\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{4} \\
\frac{1}{5} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{5} \\
\frac{1}{6} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{6} \\
\frac{1}{7} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{140} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{7} \\
\cdots\cdots
\end{array}
$$

6 关系

杨辉三角每一项乘以他的层数就是莱布尼茨三角形的分母莱布尼茨三角与杨辉三角与排列组合 $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$. 它们三个的关系，很亲密吧？

杨辉三角第n行第m个数，是C_{n-1}^{m-1}. 莱布尼茨三角的第n行乘以n的阶乘，就是杨辉三角的第n行. 莱布尼茨三角的第n行第m个数，是$\frac{C_{n-1}^{m-1}}{n!}$.

7 排列

$P_n^m = n(n-1)(n-1)\cdots(n-1) = \frac{n!}{(n-m)!}$
剩下的有几种可能，就乘几

$\because C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$
$\therefore C_n^m = C_n^{n-m}$