等价无穷小替换

小圆滚滚

1 等价无穷小、洛必达法则、泰勒公式

等价无穷小是无穷小之间的一种关系，指的是：在同一自变量的趋向过程中，若两个无穷小之比的极限为1，则称这两个无穷小是等价的。无穷小等价关系刻画的是两个无穷小趋向于零的速度是相等的。

洛必达法则：其实我们只需要牢记两点即可。第一点是不管x趋向于什么值，只要保证分子分母同时趋向于0或者是无穷，并且导数存在，且分母的导数不为0即可。也就是说如果分子分母的极限不同时为0或者无穷大，则不能使用洛必达法则。这一点一定要牢记，因为在我们多次使用洛必达法则的过程当中，很有可能出现分子分母不在满足这个条件的情况，我们在使用的时候一定要铭记。

柯西中值定理是证明洛必达法则的基础。代数基本定理的第一个严格证明通常认为是高斯给出的(1799年在哥廷根大学的博士论文)。任何复系数一元n次多项式方程在复数域上至少有一根(n⩾1)，由此推出，n次复系数多项式方程在复数域内有且只有n个根（重根按重数计算）。由此重新定义发现了一元二次方程的根是虚数。

等价无穷小代换：是求极限过程中经常用到的一种方法，它实际上就是泰勒公式展开的前一项或前两项。其原理，是基于“等价无穷小”的定义以及“极限的乘法、除法运算法则”。

特别注意：用等价无穷小代换求极限时，乘积项可以直接代换，而和差项不能直接代换，但可以作为整体代换。

2 常用的等价无穷小代换

$x \to 0$时：

$sinx \sim x, \quad tanx \sim x, \quad arcsinx \sim x, \quad arctanx \sim x$

$1 - cosx \sim \frac{x^2}{2}$

$e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim xlna$

$ln(1 + x) \sim x$

$\sqrt[n]{1 + x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

$(1 + x)^n - 1 \sim ax$

3 举例

近似计算$\sqrt[3]{999.5}$

当$|x|$很小时(百里挑一)，有

$\sqrt[n]{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$

解：$\sqrt[3]{999.2} = \sqrt[3]{1000 - 0.5} = 10\sqrt[3]{1 - 0.0005} \approx 10(1 + \frac{1}{3} \times 0.0005) \approx 9.998$

4 一元函数的泰勒公式

$$\begin{aligned} f(x) = &f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\ &+ \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &+ \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

意义：可用n次多项式来近似表达函数f(x)，且误差是当$x \to x_0$时比$(x-x_0)^n$高阶的无穷小。

以下列举一些常用函数的泰勒公式：