牛顿迭代法-泰勒展开式的前两项

小圆滚滚

1 牛顿迭代公式

设r是$f(x) = 0$的根，选取x_0作为r的初始近似值，过点$(x_0, f(x_0))$做曲线$y = f(x)$的切线L，$L: y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$，则L与x轴交点的横坐标$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，称$x_1$为r的一次近似值。过点$(x_1, f(x_1))$做曲线$y = f(x)$的切线，并求该切线与x轴交点的横坐标$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$，称$x_2$为r的二次近似值。重复以上过程，得r的近似值序列，其中，$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$称为r的n+1次近似值，上式称为牛顿迭代公式。

用牛顿迭代法解非线性方程，是把非线性方程$f(x) = 0$线性化的一种近似方法。把$f(x)$在点x_0的某邻域内展开成泰勒级数$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + R_n(x)$，取其线性部分（即泰勒展开的前两项），并令其等于0，即$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$，以此作为非线性方程$f(x) = 0$的近似方程，若$f'(x) \neq 0$，则其解为$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，这样，得到牛顿迭代法的一个迭代关系式：$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_0)}{f'(x_n)}$。

已经证明，如果是连续的，并且待求的零点是孤立的，那么在零点周围存在一个区域，只要初始值位于这个邻近区域内，那么牛顿法必定收敛。并且，如果不为0, 那么牛顿法将具有平方收敛的性能. 粗略的说，这意味着每迭代一次，牛顿法结果的有效数字将增加一倍。

迭代法也称辗转法，是一种不断用变量的旧值递推新值的过程，跟迭代法相对应的是直接法（或者称为一次解法），即一次性解决问题。迭代算法是用计算机解决问题的一种基本方法。它利用计算机运算速度快、适合做重复性操作的特点，让计算机对一组指令（或一定步骤）重复执行，在每次执行这组指令（或这些步骤）时，都从变量的原值推出它的一个新值。

2 举个栗子

题目

函数$f(x) = (x - 2)^2$，切线的斜率$y' = 2(x - 2)$

1.我们任意取一点A(4, 4)，在曲线上做A的切线y=4(x-3)，求得切线与x轴的交点B(3, 0).在B上做垂线，与函数的交点为C(3, 1).

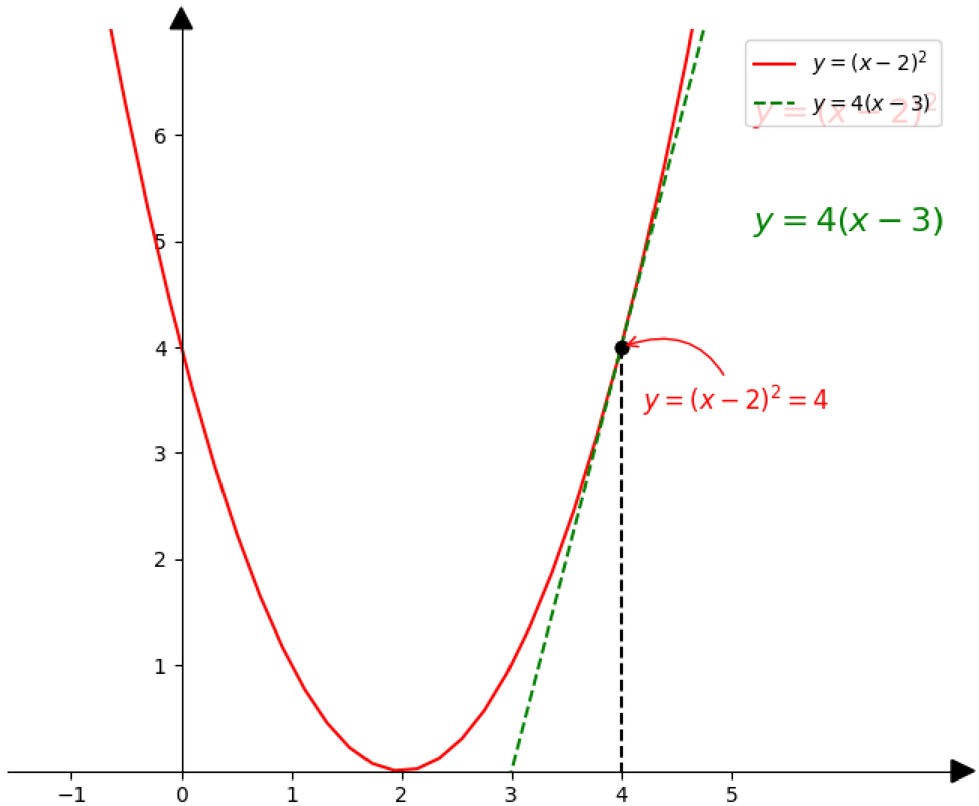

图 1: 正方形一刀切掉四分之一

2.在曲线上做C点(3, 1)的切线y=2(x-2.5)，交X轴与D点(2.5, 0)，在D点做X轴的垂线，交曲线于E点(2.5, 0.25)。我们可以看到D点比B点更加接近方程$f(x) = (x-2)^2 = 0$的根$x = 2$.

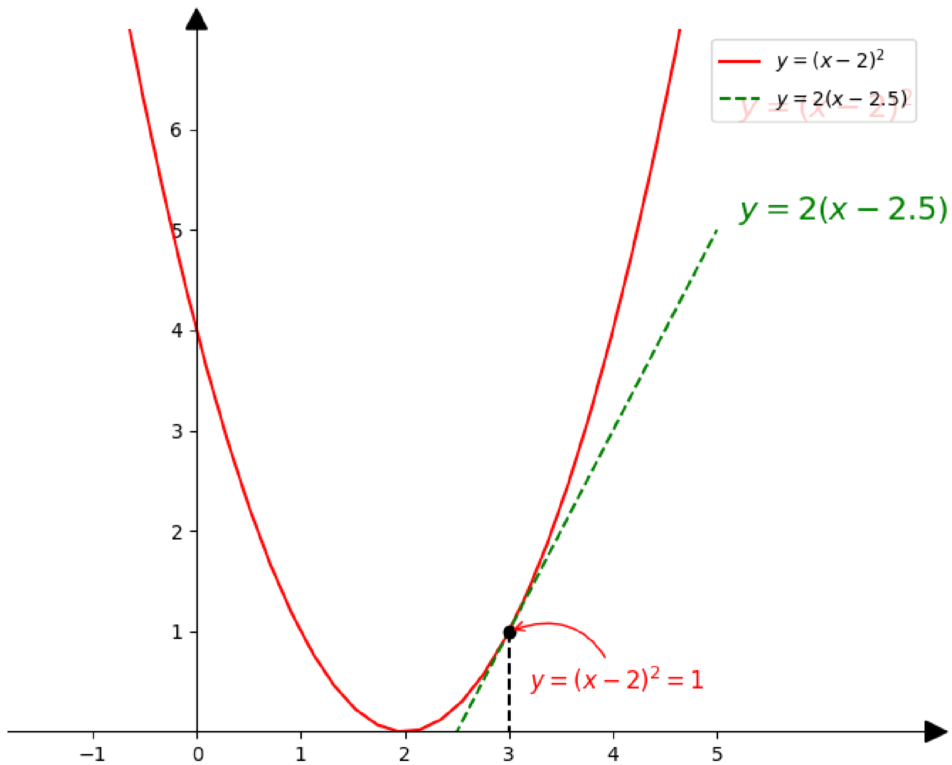

图 2: 正方形一刀切掉四分之一

3.在曲线上做E点(2.5, 0.25)的切线y=x-2.25，交X轴与F点(2.25, 0)，在F点做X轴的垂线，交曲线于G点(2.25, 0.0625)。可以看到G点比D点更加接近方程的根.

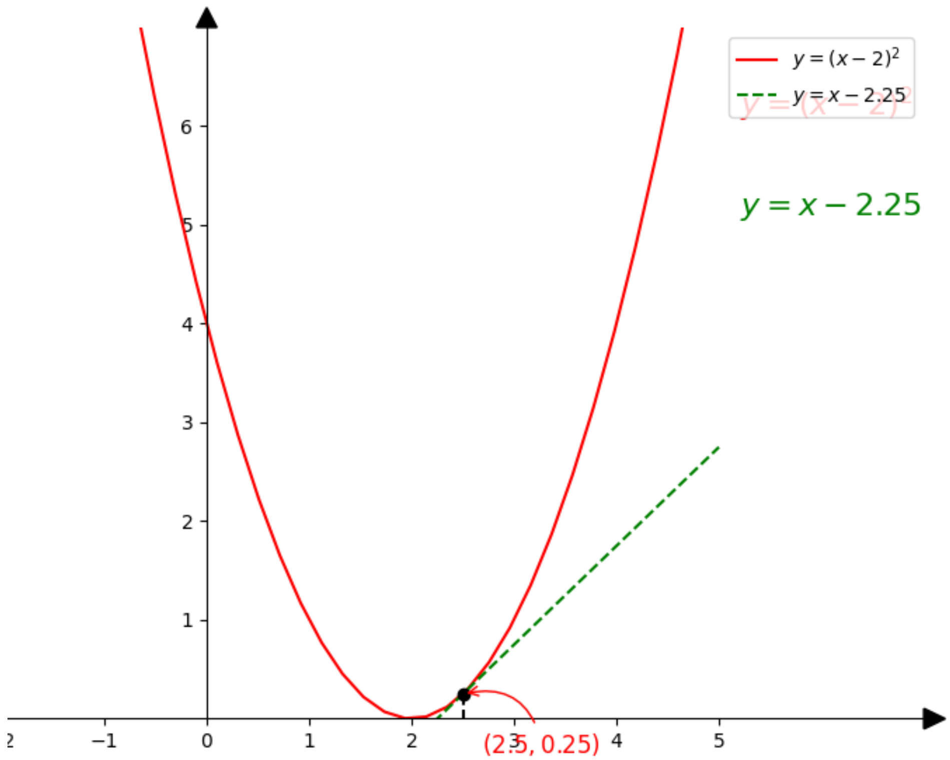

图 3: 正方形一刀切掉四分之一

4.按照这个方式一直迭代即可得到函数$f(x)=0$的近似解。