圆拉伸可以得到椭圆

小圆滚滚

1 圆演变成椭圆

已知圆的方程为：$x^2 + y^2 = r^2$

假设延x轴拉伸k倍，则新坐标$\begin{cases} x_2 = kx \\ y_2 = y \end{cases} \quad (k > 1)$ 也即 $\begin{cases} x = \frac{x_2}{k} \\ y = y_2 \end{cases}$

代入圆的方程

则新的坐标满足$(\frac{x_2}{k})^2 + y_2^2 = r^2$

两边都除以r^2

令a=kr, b=r

则新的坐标满足$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$

即椭圆方程。

2 椭圆的方程

2.1 二倍角公式

$sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha$

$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

2.2 复合函数求导

$$\begin{aligned}(sin\alpha \cdot cos\alpha)' &= cos\alpha \cdot cos\alpha + sin\alpha(-sin\alpha) \\ &= cos^2\alpha - sin^2\alpha \\ &= cos2\alpha\end{aligned}$$

2.3 椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

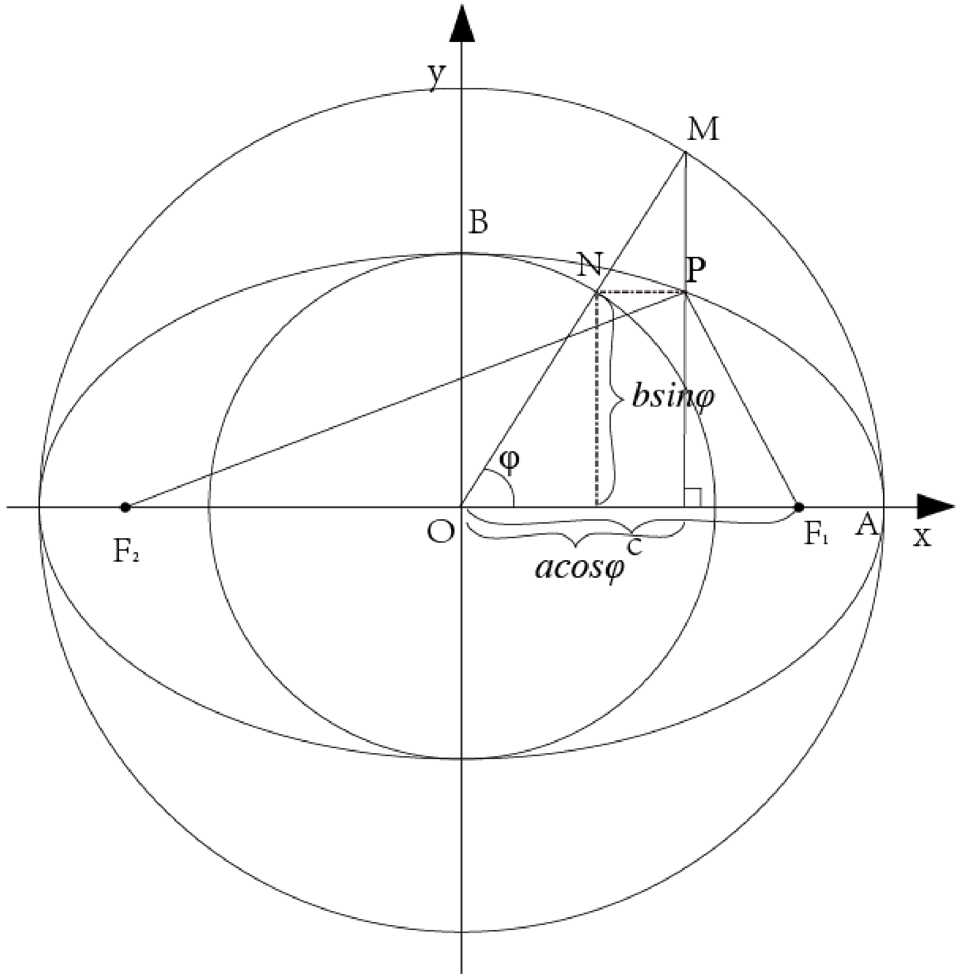

图 1: 椭圆参数方程1

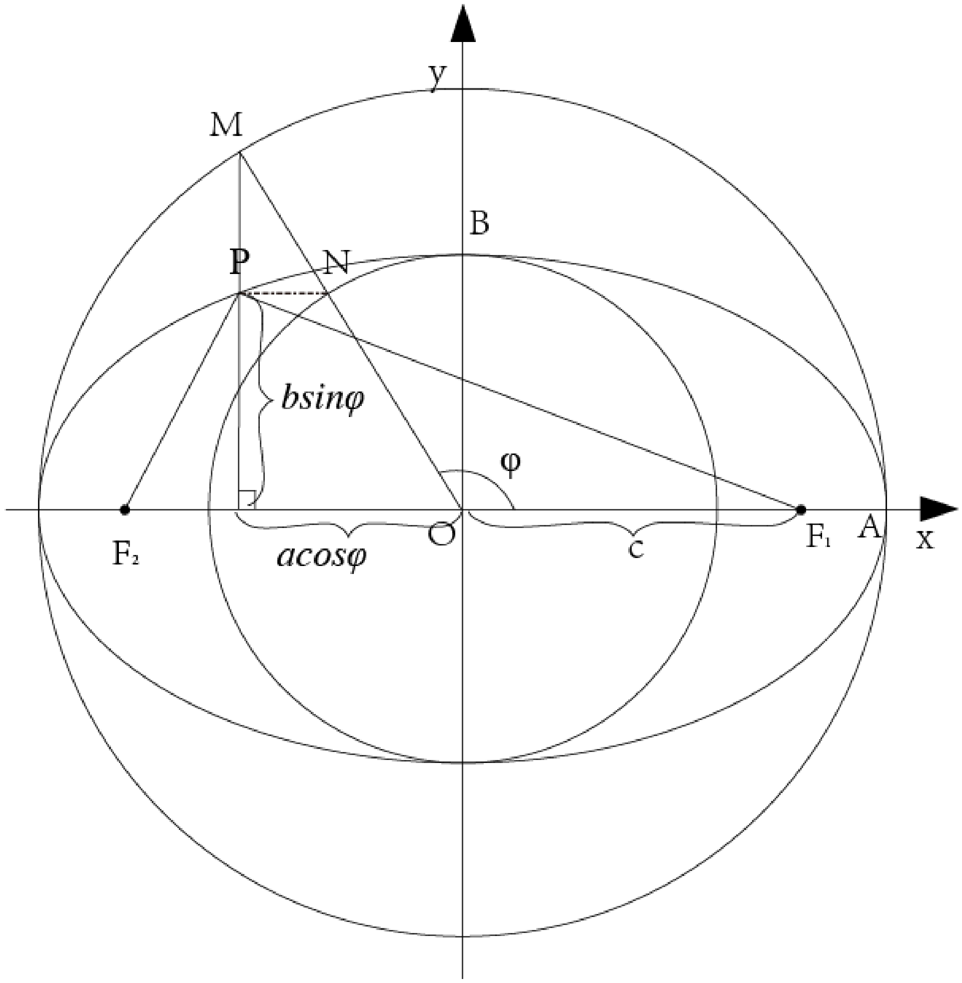

图 2: 椭圆参数方程2

2.4 椭圆的代数方程推导

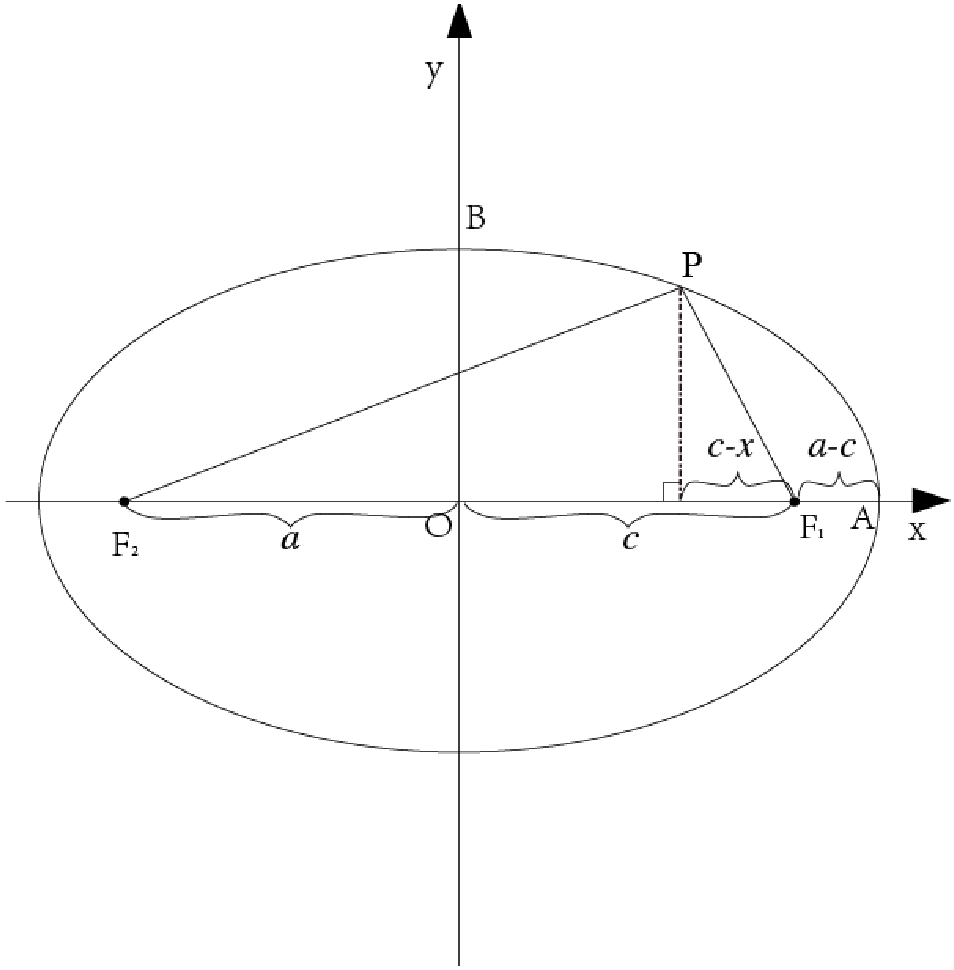

图 3: 椭圆代数方程

如图3，若$|PF_2|+|PF_1|=2a$

其中$|PF_2|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$， $|PF_1|=\sqrt{(c-x)^2+y^2}$

则$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}=2a$

移项

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(c-x)^2+y^2}$

等式两边同时平方

$(x+c)^2+y^2=(2a)^2-2a\sqrt{(c-x)^2+y^2}+(c-x)^2+y$

化简得

$xc=a^2-a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$

移项

$a\sqrt{(c-x)^2+y^2}=a^2-xc$

等式两边同时平方

$a^2c^2-2a^2cx+a^2x^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$

消项、移项

$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

$\because a^2-c^2>0$，设$a^2-c^2=b^2$

则$b^2x+a^2y=a^2b^2$

等式两边同除以a^2b^2，得

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

即椭圆的标准方程。

2.5 椭圆面积

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}S &= \int_0^a y\cdot dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\cdot sin\varphi\cdot d(a\cdot cos\varphi) \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 ab(-sin^2\varphi)d\varphi \\
&= ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{cos2\varphi-1}{2}d\varphi \\
&= \frac{ab}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (cos2\varphi-1)d\varphi \\
&= \frac{ab}{2}\left[sinx\cdot cosx-x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

```
>>> import math
>>> x = math.pi/2
>>> math.sin(x)*math.cos(x)-x
-1.5707963267948966
>>> math.pi/2
1.5707963267948966
>>> x = 0
>>> math.sin(x)*math.cos(x)-x
0.0
```

$\therefore S=\frac{\pi}{4}ab\times 4=\pi ab$

$\cancel{\frac{1}{4}S=\frac{ab}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0(cos2\varphi-1)d\varphi=\frac{ab}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{1}{2}dsin2\varphi-d\varphi}$

当$a=b$时，就是圆的面积。

2.6 椭球的体积

方法一：

从椭球的解析式(1)就可以看出椭球只不过是半径为a的球，y方向上的每一条线均扩大$\frac{b}{a}$倍，z方向上的每一条线均扩大$\frac{c}{a}$倍。而球的体积是$\frac{4\pi a^3}{3}$，因此椭球的体积自然就是$\frac{4\pi a^3}{3}\frac{b}{a}\frac{c}{a}=\frac{4}{3}\pi abc$

方法二：

利用积分，将(1)式移项，

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$
同除等号右侧部分，得到椭球在Z轴上的横截面椭圆表达式：
即上半椭球，用平面$z=h$截椭球，得到椭圆：
$\frac{x^2}{a^2(1-\frac{h^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1-\frac{h^2}{c^2})}=1$
其面积为：
$S(h)=\pi ab(1-\frac{h^2}{c^2})$

$$\begin{aligned}V_{半椭球}&=2\int_0^c S(h)dh\\&=2\int_0^c \pi ab(1-\frac{h^2}{c^2})dh\\&=\frac{2}{3}\pi abc\end{aligned}$$

整个椭球体的体积为：$V=2V_1=\frac{4}{3}\pi abc.$

3 椭球的表面积

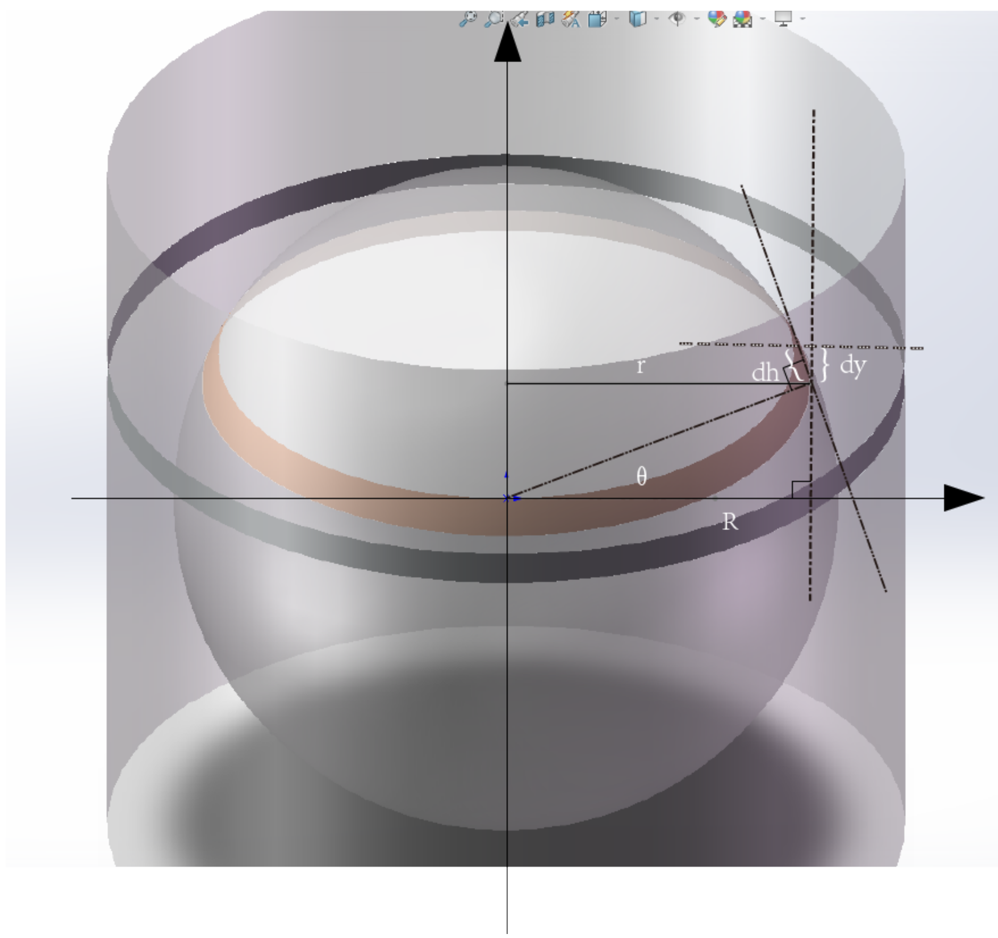

图 4: 球体表面积

$S_{球}=2\int_0^r ldh$

令微圆的半径$r=R\cdot cos\theta$

面积的弧增量与y轴微增量关系是$dh=\frac{dy}{cos\theta}$

y轴微增量与角度对应关系是$y=R\cdot tan\theta$，则：

$S_{球}=2\int_0^r 2\pi Rcos\theta\cdot\frac{dy}{cos\theta}$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi Rd(Rtan\theta)$

$=4\pi R^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d(tan\theta)$

$=4\pi R^2$

由第1章，椭圆定义，可知长轴与短轴的比例也就是圆弧改变的速率。$\frac{a}{b}=k$所以：

$S_{椭球}=2\int_0^r ldh$

令微圆的半径$r=R\cdot cos\theta=b\cdot cos\theta$

面积的弧增量与y轴微增量关系是$dh=\frac{dy}{cos\theta}\cdot what$(这里无法精确，所以会影响最后结果。椭圆周长没有精确公式。只有近似求解。所以表面积也同样无法球精确解)

y轴微增量与角度对应关系是$y=R\cdot tan\theta\cdot k=b\cdot tan\theta\cdot k$，则：

$S_{椭球}=2\int_0^r 2\pi b\cdot cos\theta\cdot\frac{dy}{cos\theta}\cdot what$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi b\cdot what\cdot d(b\cdot tan\theta\cdot k)$

4 椭球面参数方程推导

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

方法一：

不失一般性，设方程(1)中a¿b¿c

以O为球心，分别以a, b, c为半径做三个同心球，从O任引射线ON，设分别交三球面于A、B、C，则OA = a, OB = b, OC = c,将射线ON向XOY平面投影，设A、B、C的射影分别为A'、B'、C'.设$\angle ZON=\theta,\angle XON'=\varphi$，过$A'$、$B'$分别作$A'A_1\perp XO, B'B_1\perp XO$,过A作平面$\alpha\perp X$轴，过B作平面$\beta\perp Y$轴，过C作平面$\gamma\perp Z$轴.设三平面交于一点M(x, y, z)，则x=A点的横标$=OA_1=OA'\cos\varphi=OA\sin\theta\cos\varphi=a\sin\theta\cos\varphi$.

y=B点纵标$=B_1B'=OB'\sin\varphi=OB\sin\theta\sin\varphi=b\sin\theta\sin\varphi$.

z=$C'C=OC\cos\theta=c\cos\theta$.

从以上三式消去φ,θ即得椭球面方程(1)。

故椭球面为M的轨迹

$$\begin{cases} x &= a\sin\theta\cos\varphi \\ y &= b\sin\theta\sin\varphi \\ z &= c\cos\theta \end{cases} \quad \begin{matrix}(0\le\theta\le\pi)\\(0\le\varphi<2\pi)\end{matrix}$$

为椭球面(1)的参数方程。

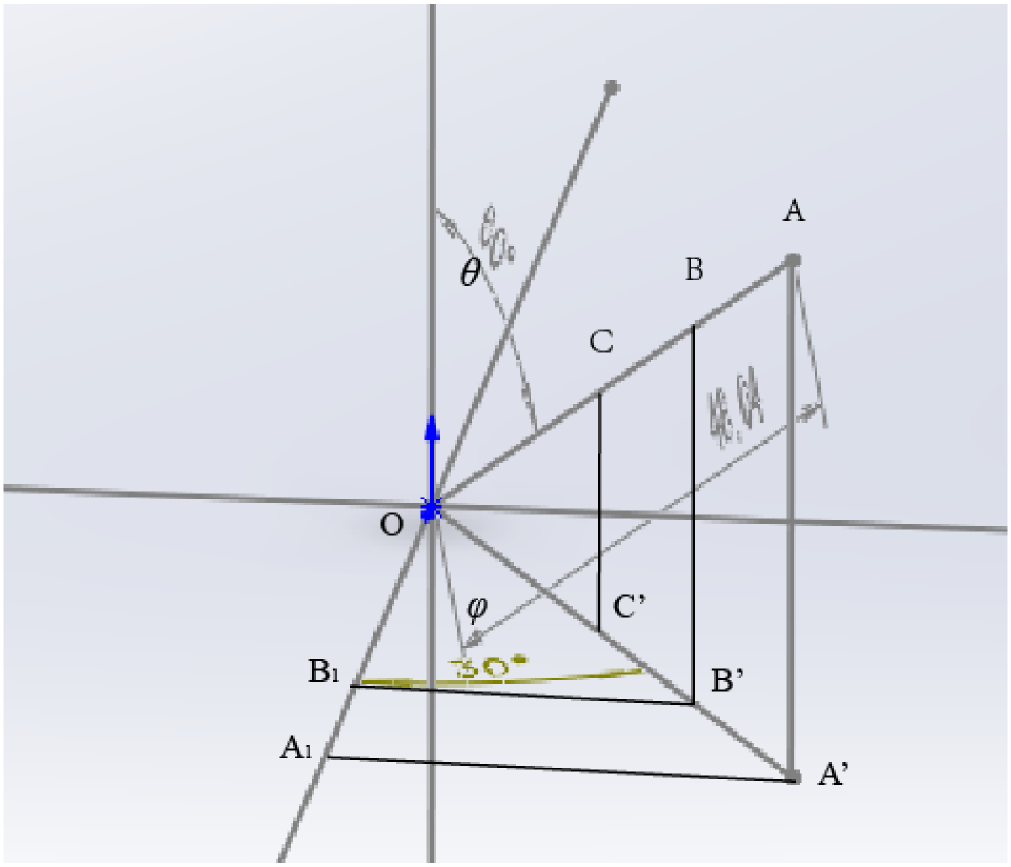

图 5: 球体表面积