球体体积与乌鸦喝水

小圆滚滚

1 球体体积公式

上半球视角从y轴上0点看起，从下到上，随着dy不断变化，微圆面积的半径从r到0.

$V_{球} = 2\int_0^r S dy = 2\int_0^r \pi(r^2 - y^2) dy$

$= 2\pi\int_0^r r^2 dy + 2\pi\int_0^r y^2 dy$

$= 2\pi r^3 - 2\pi \times \frac{1}{3} r^3$

$= \frac{4}{3}\pi r^3$

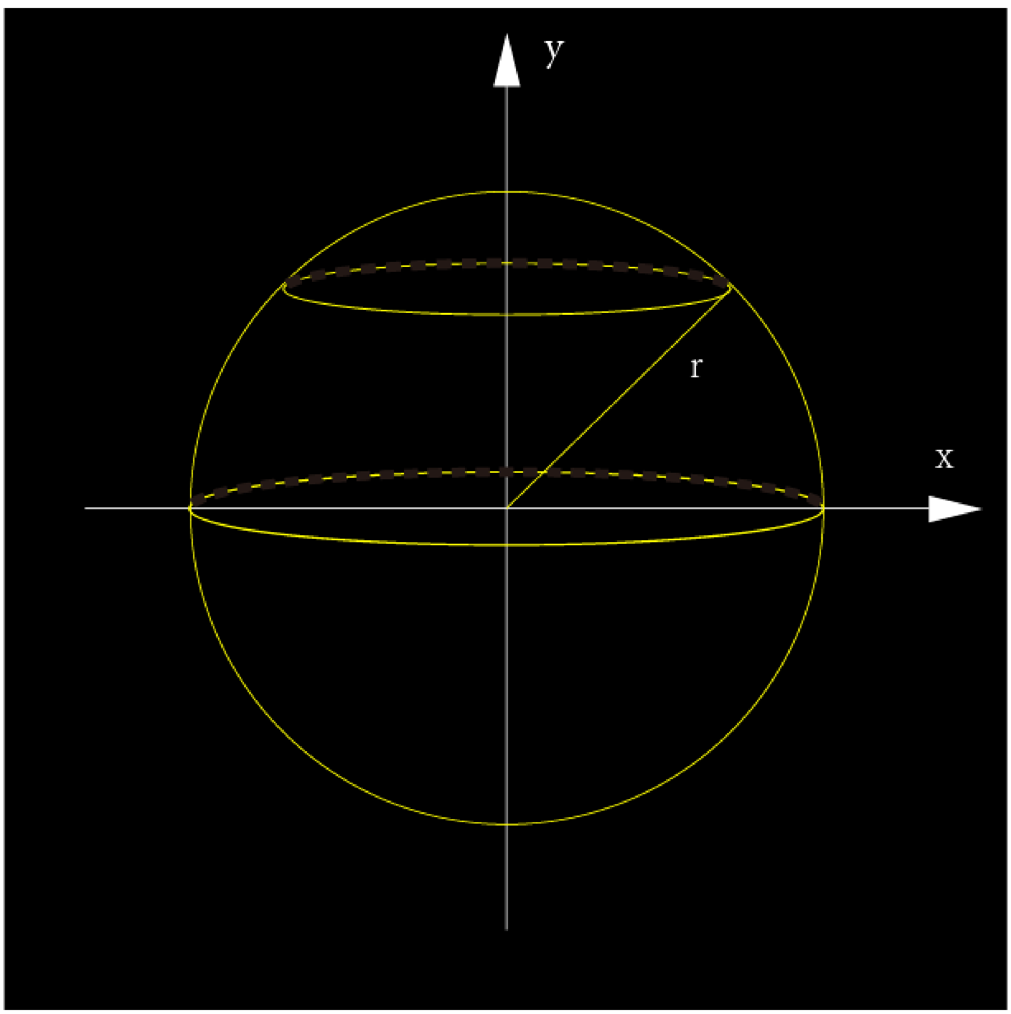

图 1: 球体体积

2 瓶中石头的数量与水面上升的高度

2.1 如果瓶中有一块石头

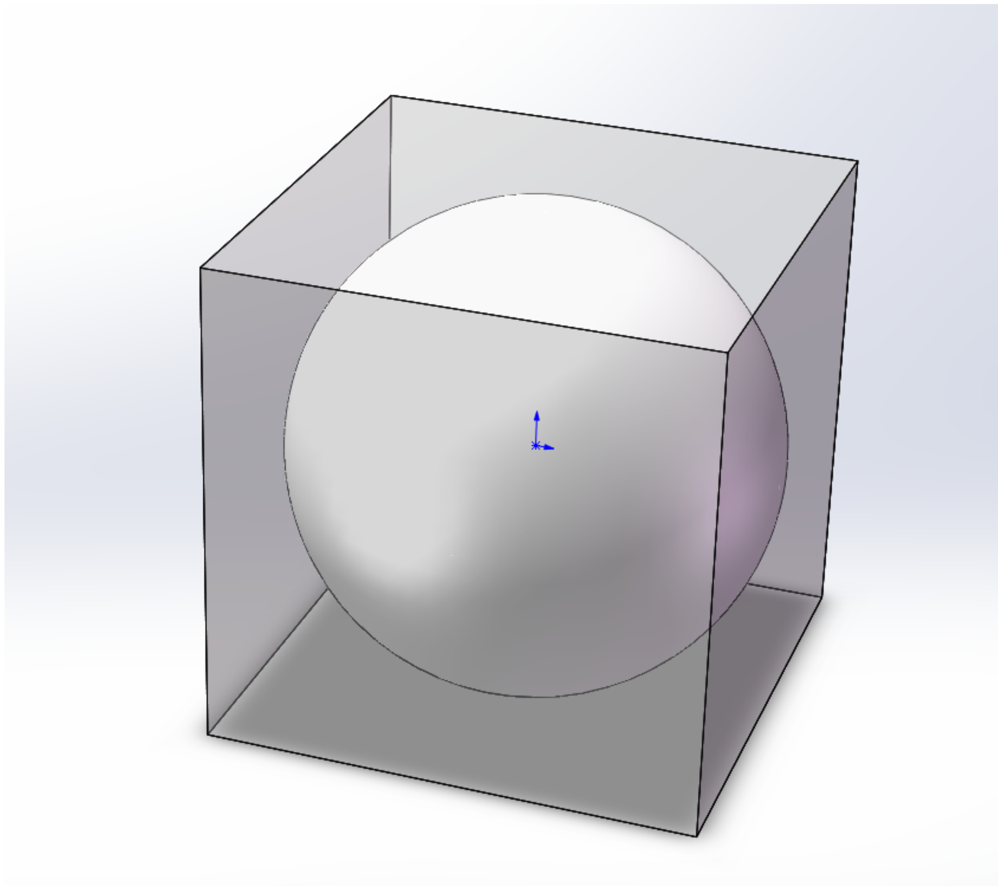

图 2: 一个球

2.2 如果瓶中有多块石头

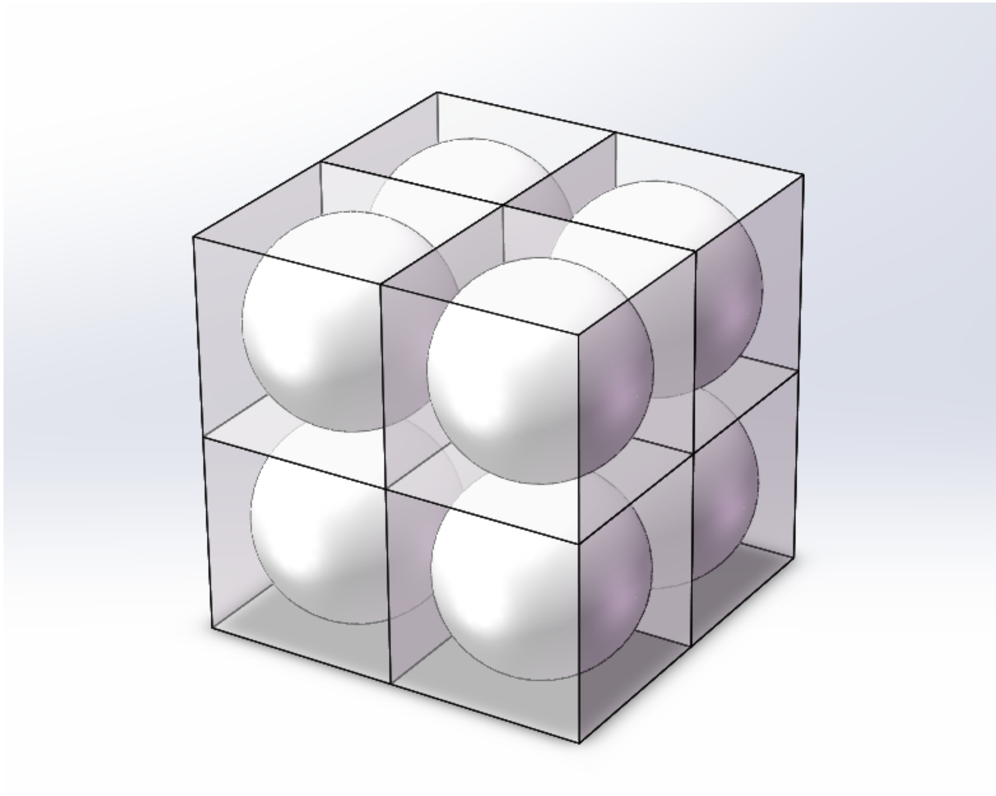

图 3: 8个球

根据图片2可知一个球的体积 和它的容器的比例是：
$\frac{V_{球}}{V_{正方体}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{(2r)^3} = \frac{\pi}{6} = math.pi/6 \approx 0.5235987755982988$
所以当瓶子里只有0.4764瓶水或者更少的时候。填同样大小的圆形石子是无法喝到水的。

2.3 有人说缝隙要填满

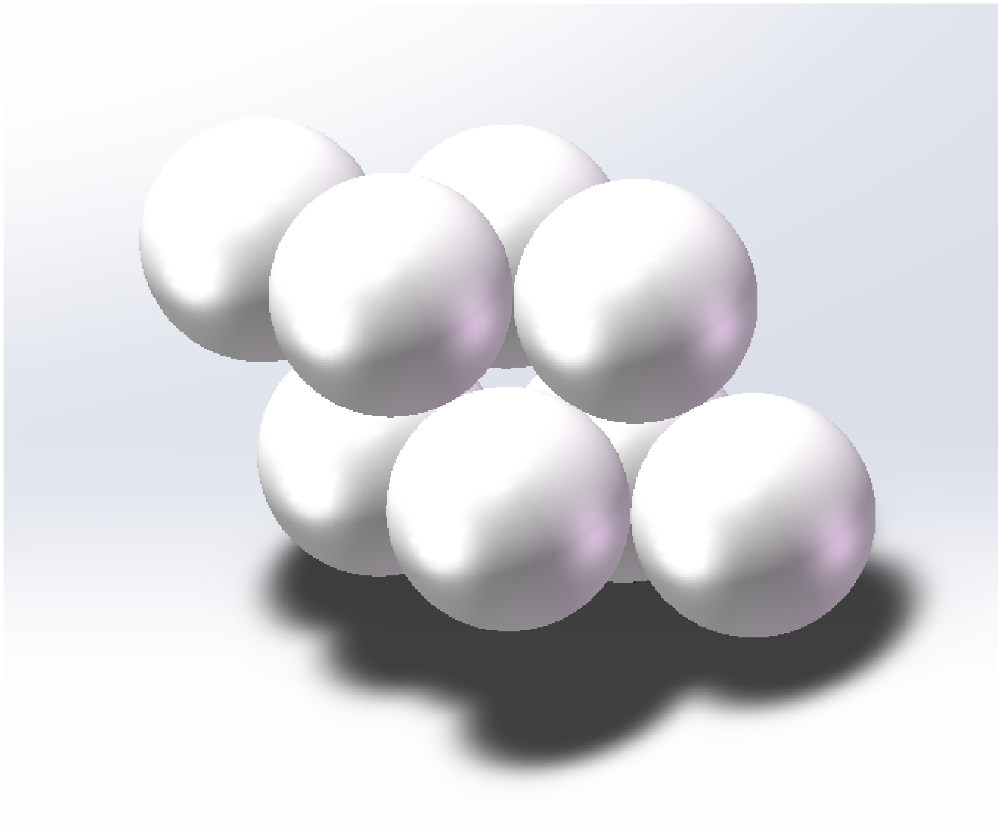

图 4: 更贴合吗

2.4 锥形建模

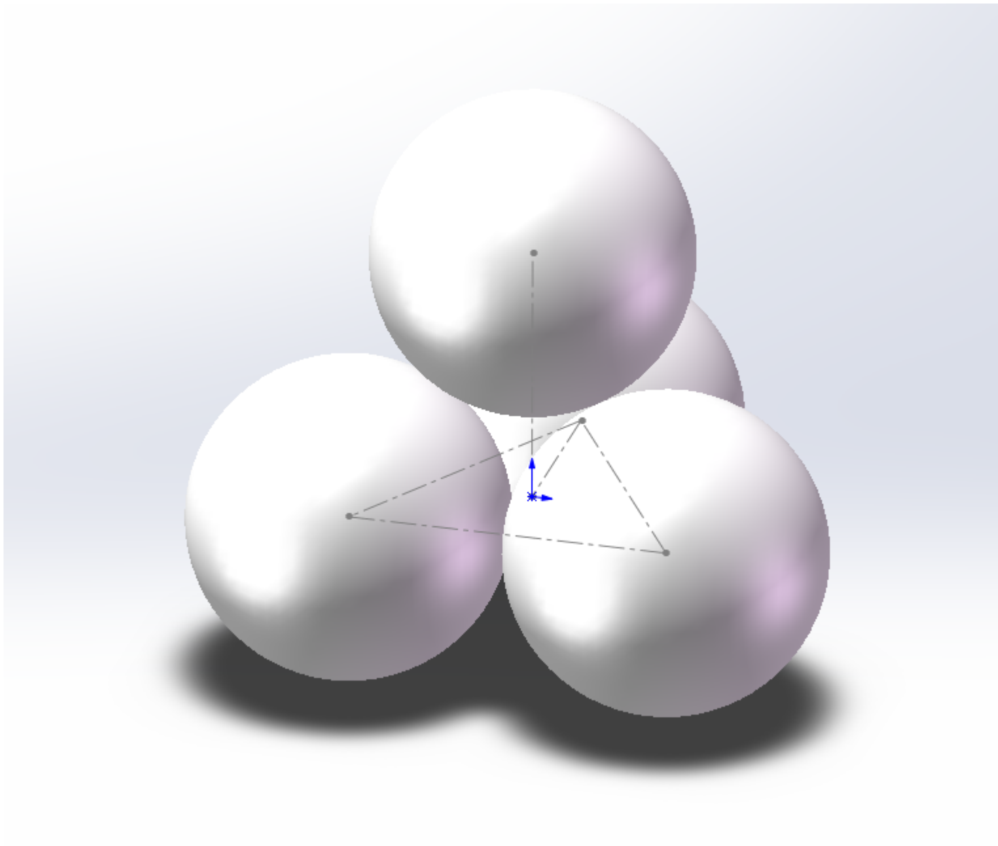

图 5: 更贴合吗2

为什么我们不能用圆和石头这种不能密铺的图形来进行微分。因为在侵占的同时，圆不能保证自己的失地比例，而长条的二分之一，每次都能增加步步为营。同理，我们不能用洋葱那样的环形来解释圆的微分。因为在变形的拉伸过程中，初学者不理解为什么长度可以柔性的互相抵消变形。

2.5 锥形建模2

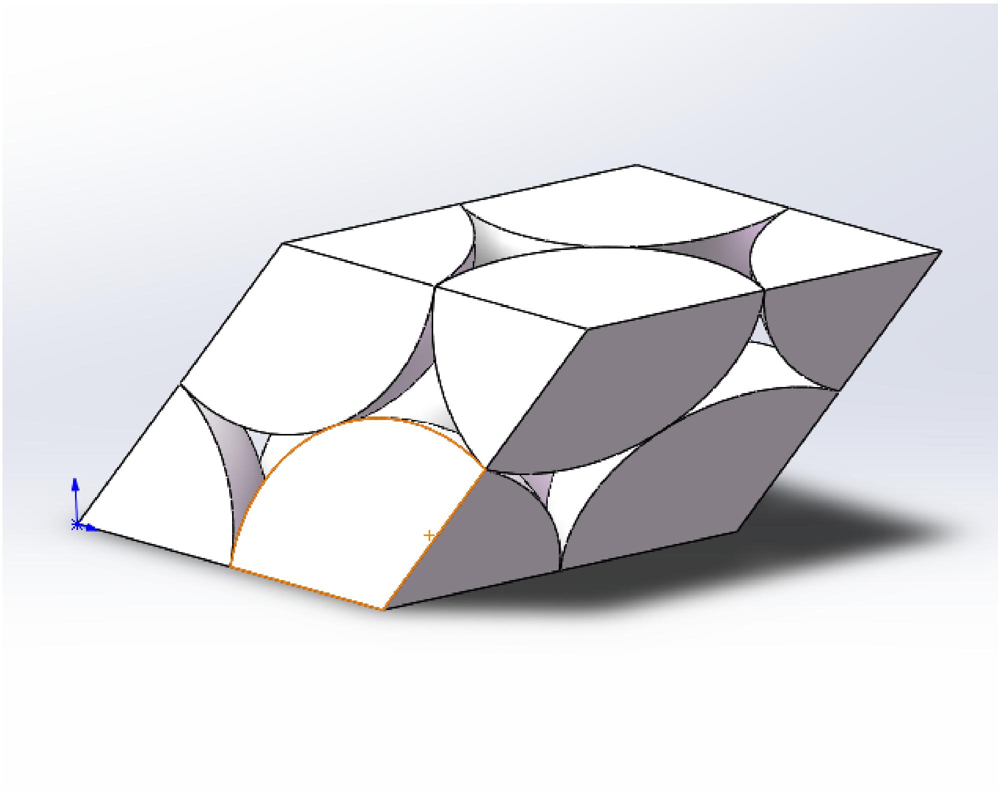

图 6: 单个沙琪玛

此时的体积比计算如下：

菱形体底面中心点到顶点距离$dis = r/math.cos(math.pi/6) \approx 57.735026918962575$

菱形体地面的高菱$h_1 = l \times sin\frac{\pi}{3} = 100 * math.sin(math.pi/3) \approx 86.6$

菱形体高$h_2 = math.sqrt((2 * r) * *2 - (r/math.cos(math.pi/6)) * *2) \approx 81.64965809277261$

菱形体体积：$V = l \times h_1 \times h_2 = 100 * 86.6 * 81.65 \approx 707089.0$

球体体积：$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4/3 * math.pi * (50 * *3) \approx 523598.7756$

$523598.7755982988/707089.0 \approx 0.740499110576319$

所以当瓶子里只有0.2595瓶水或者更少的时候。填同样大小的圆形石子是无法喝到水的。

2.6 锥形建模3

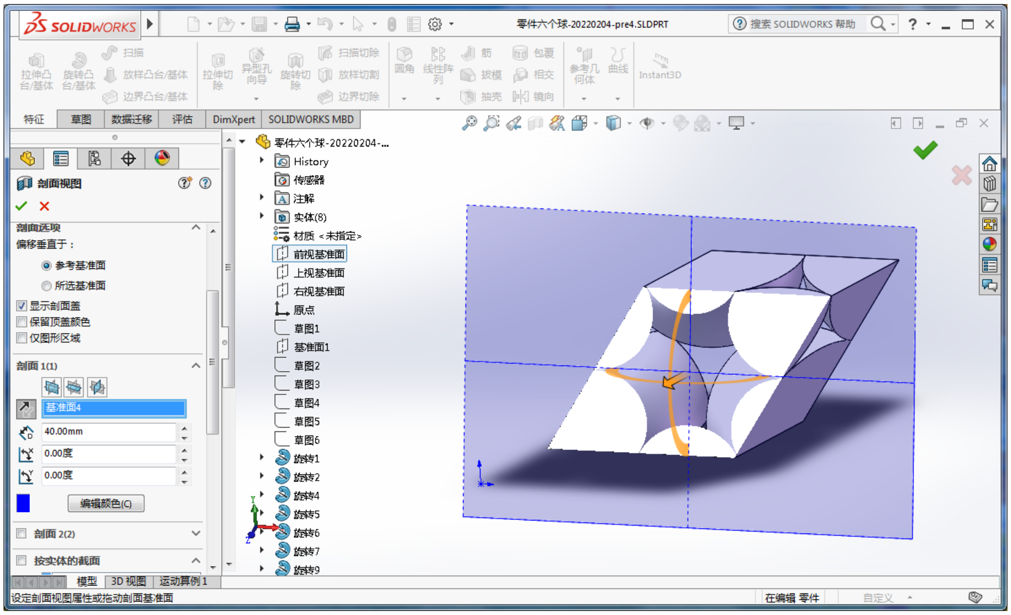

图 7: 沙琪玛剖面图

2.7 锥形建模4

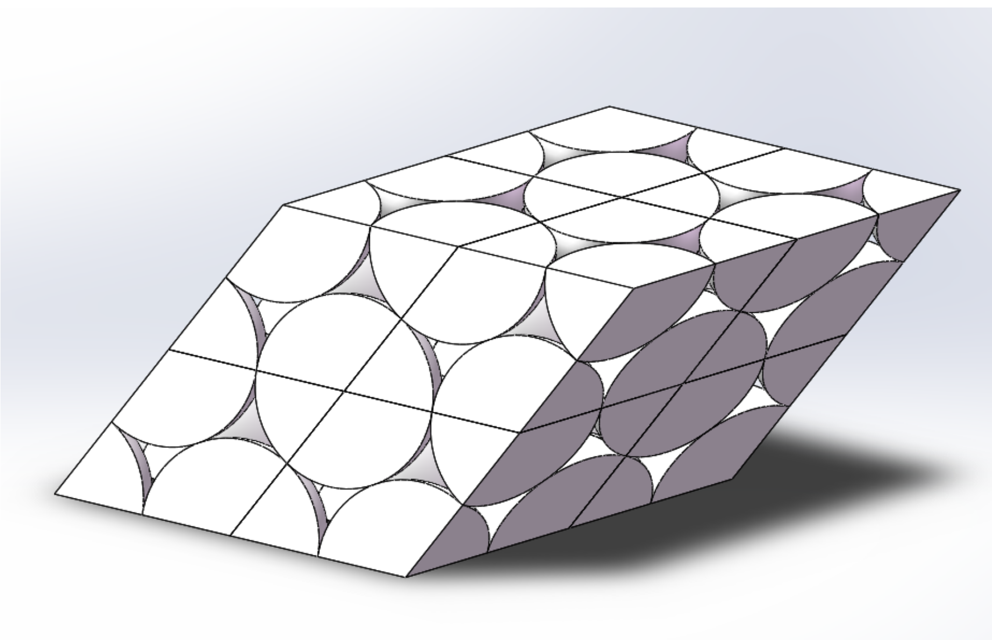

图 8: 多个沙琪玛

2.8 球体的表面积

上半球，视角从y轴上0点看起，从下到上，随着dy不断变化，微圆周的半径从r到0.

$S_{球} = 2\int_0^r ldy = 2\int_0^r 2\pi\sqrt{r^2-y^2}dy = 4\pi\cdot\int_0^r \sqrt{r^2-y^2}dy$

$\xlongequal{y=rsint} 4\pi \cdot r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 t dt$
$= 4\pi \cdot \frac{r^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos2t) dt$
$= 4\pi \cdot \frac{r^2}{2} \left[t + \frac{1}{2} sin2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi \cdot \frac{\pi r^2}{4} = (\pi r)^2$

可以看到得出的是一个错误的结论。原因就是使用微积分的理论基础是线性主部。如果你的函数不能线性增长、不能主要逼近。那么你需要重新建模寻求表达。

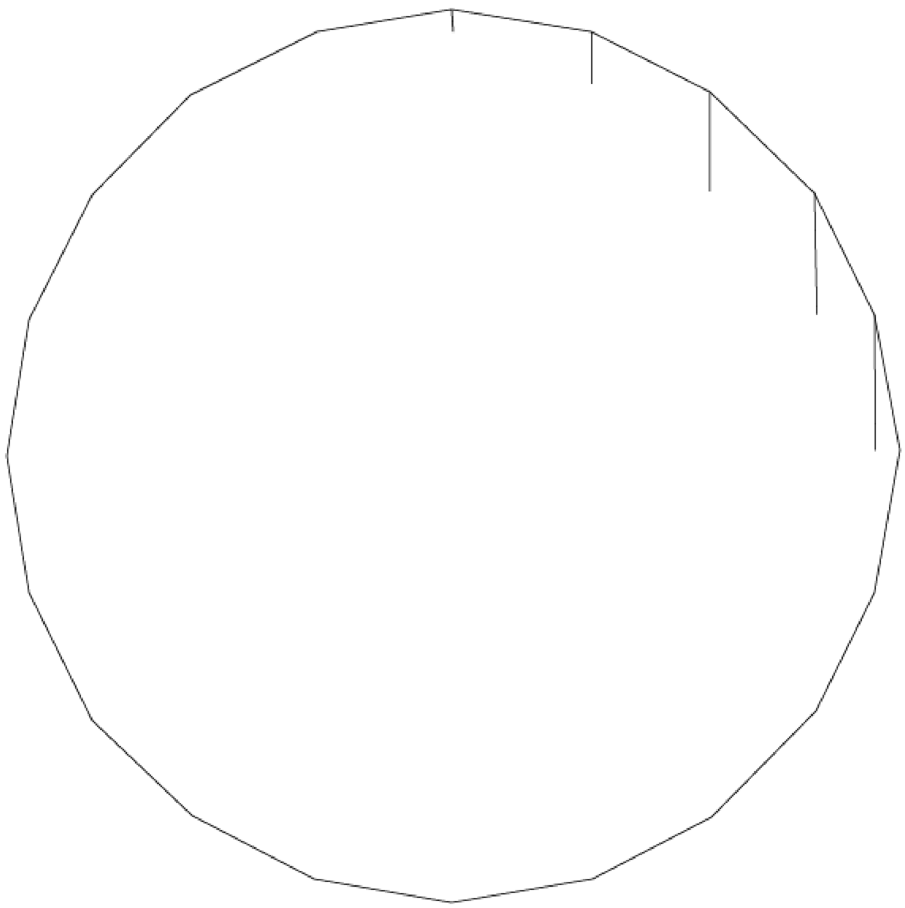

图 9: 错误的环带

如图9，求出来的环带面积是一条一条垂线围出的环，而我们需要的是斜边围绕的环。所以他们的比例也正好是直角边与斜边的比$= \frac{\pi \cdot \pi r^2}{4 \cdot \pi r^2} = \frac{\pi}{4}$.

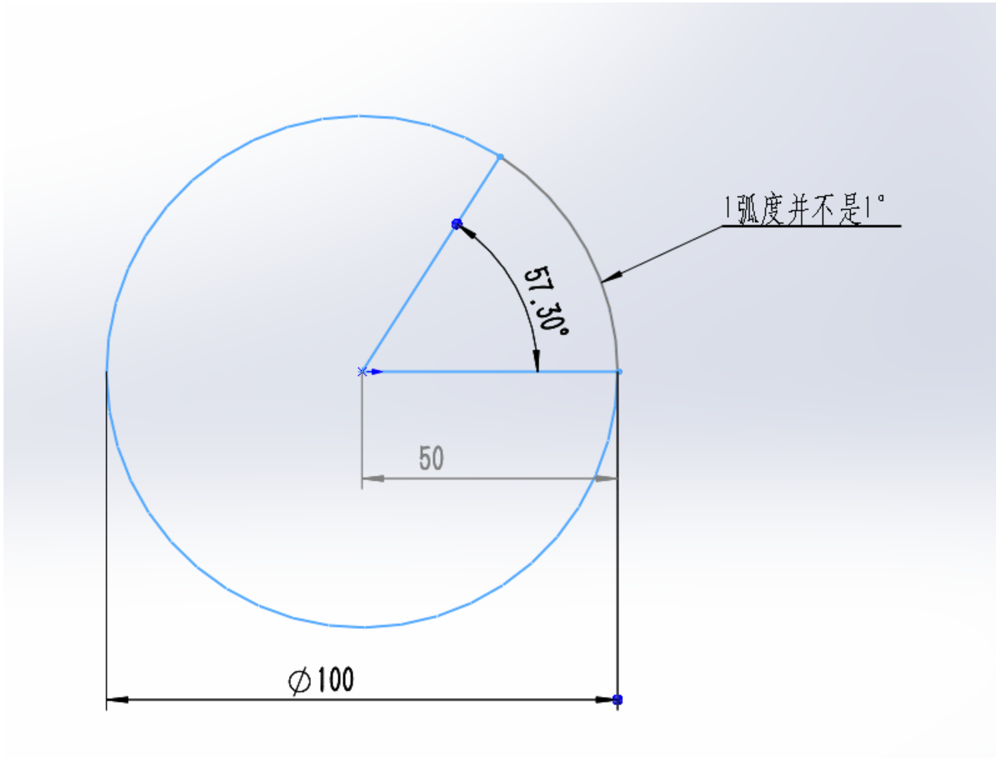

图 10: 1弧度

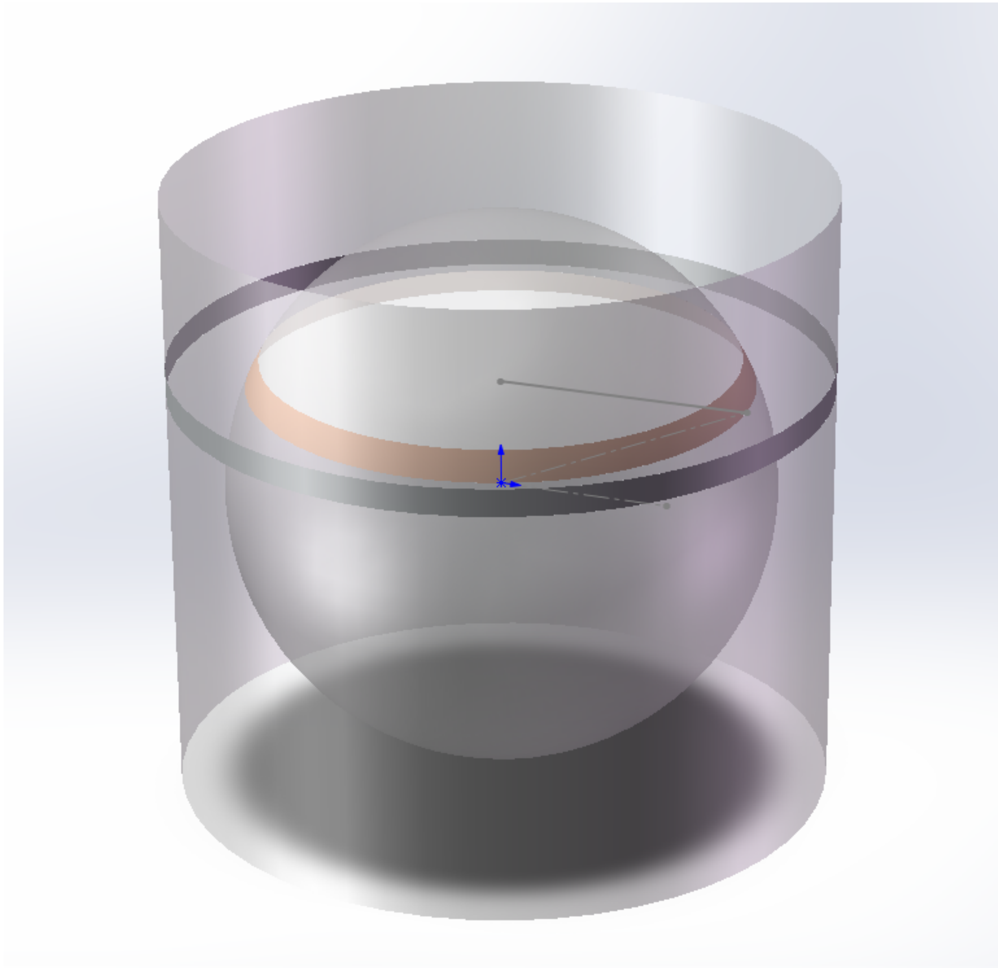

图 11: 球体表面积

$S_{球} = 2\int_0^r ldh$
令微圆的半径$r = R \cdot cos\theta$
面积的弧增量与y轴微增量关系是$dh = \frac{dy}{cos\theta}$
y轴微增量与角度对应关系是$y = R \cdot tan\theta$，则：
$S_{球} = 2\int_0^r 2\pi Rcos\theta \cdot \frac{dy}{cos\theta}$
$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi Rd(Rtan\theta)$
$= 4\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d(tan\theta)$
$= 4\pi R^2$

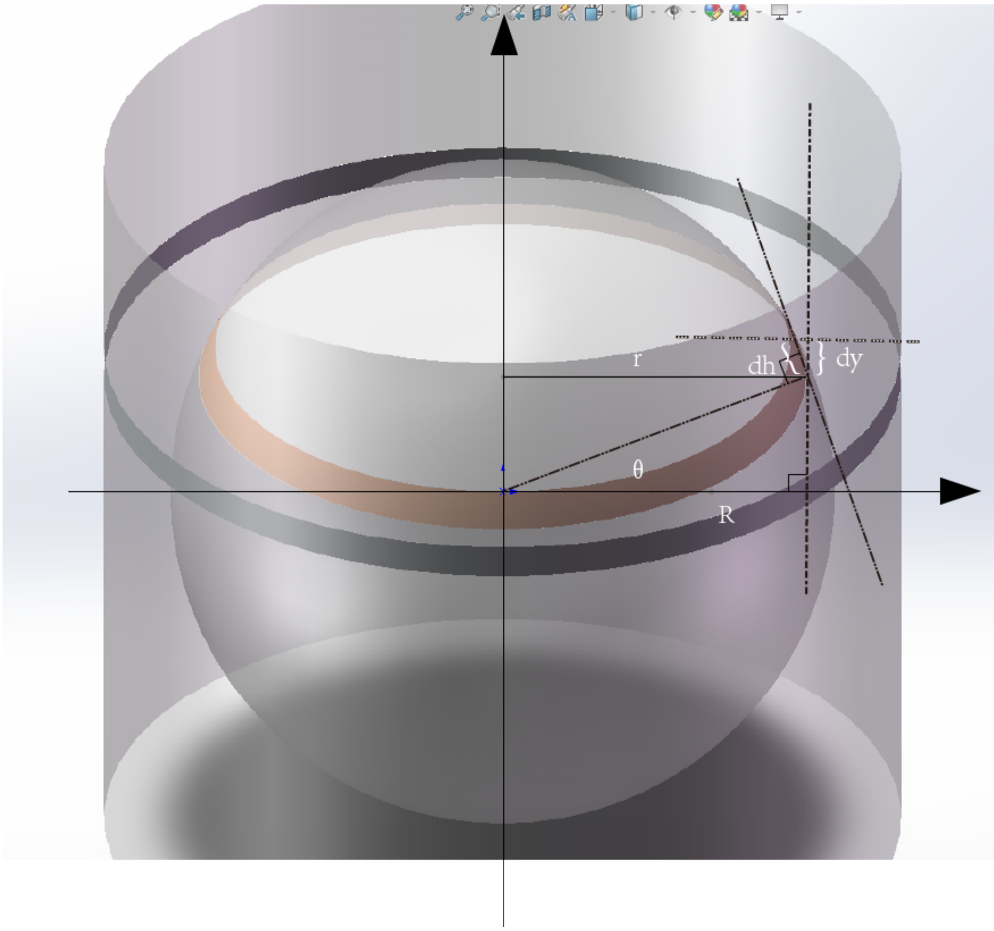

图 12: 球体表面积2