中值定理

小圆滚滚

1 罗尔定理

微分中值定理（罗尔定理）的个人理解。如果在xy垂直坐标系中一段绳子水平方向掐住两端向中间挤压，产生任意一个闭区间连续开区间可导的函数，那么这个函数打弯的地方一定有一个水平的切线。否则，就不会弯回来达到从左手到右手的水平。那将会是不断下降或者上升的一条绳子。

定义

如果函数f(x)满足：

1. 在闭区间[a, b]上连续
2. 在开区间(a, b)内可导
3. $f(a) = f(b)$

那么存在$f'(\xi) = 0, \quad \xi \in (a, b)$

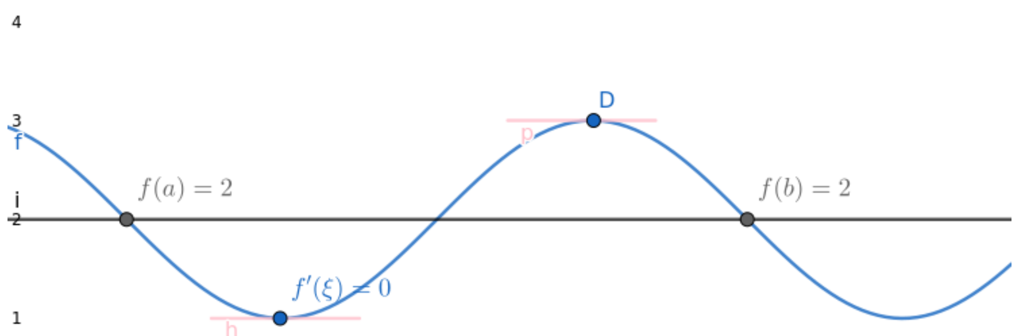

图 1: 罗尔定理

几何意义:

如果光滑的曲线$\tau : y = f(x)(x \in [a, b])$的两个端点A, B等高，即其连线AB水平,则在$\tau$上必有一点C,$(\xi, f(\xi))(\xi \in (a, b))$, τ在C点的切线是水平的.

2 拉格朗日中值定理

将水平的绳子旋转一个角度，拉格朗日中值定理。

拉格朗日中值定理,也简称均值定理。罗尔定理的扩展。

如果函数f(x)满足：

1. 在闭区间[a, b]上连续
2. 在开区间(a, b)内可导

那么存在$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad \xi \in (a, b)$

定义

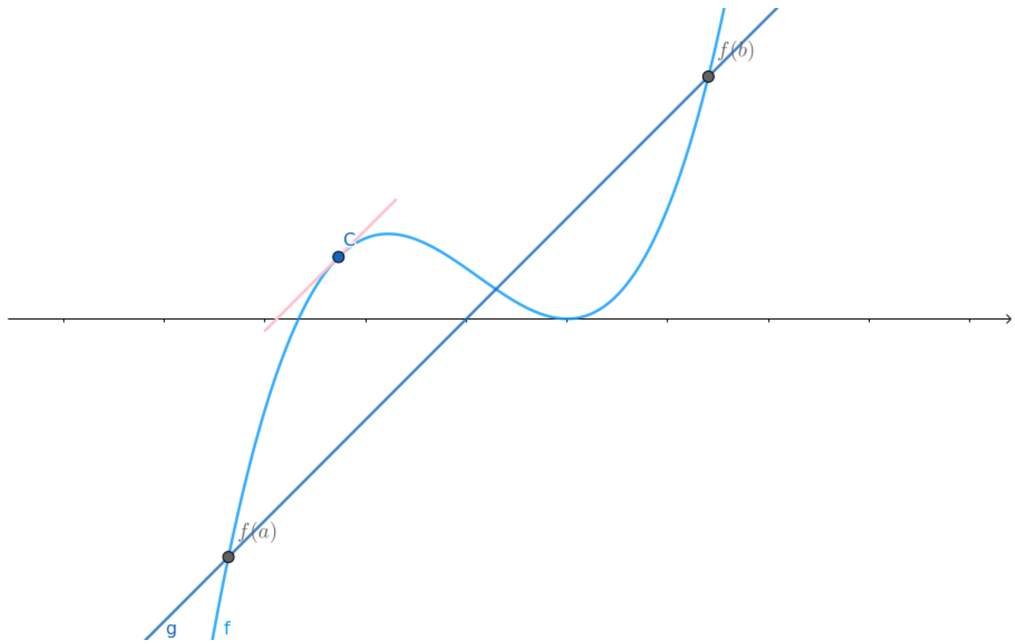

图 2: 拉格朗日中值定理

证明：

设线段AB（弦AB）的方程为：$y = L(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$，该直线以$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$为斜率。

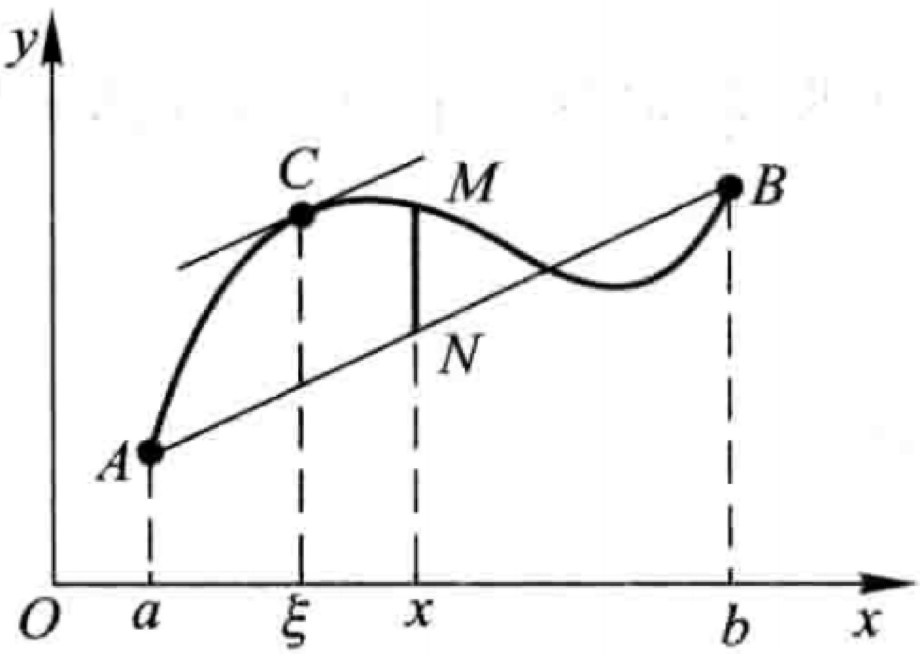

图 3: 拉格朗日中值定理

做新的函数(新的函数的意义是同济大学第七版垂直辅助线MN的差值，M在弧$\overset{\frown}{AB}$上，N在弧的两端点连线上)，函数值是有向线段NM的值。那么这个函数一定有个切线是平行于AB直线的。

$\varphi(x) := f(x) - L(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$

:=表示“定义为”。

$\varphi(x)$在[a, b]上连续，在(a, b)上可导，且两个端点必与线段AB重合，所以NM=0. $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$(此处是因为0重合，所以导致相等。相等是主要的，等于0不重要，罗尔中值定理的条件是相等，并没有要求等于0). 设完毕.

可知$\varphi'(x) = (f(x) - L(x))' = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\varphi(x)(x \in [a,b])$符合罗尔定理的条件，

$\therefore \exists \quad \xi \in (a,b)$使得

$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

证明毕。

注意：利用罗尔中值定理条件和结论。被定义的有向线段NM的函数$\varphi'(x)$与弦AB的交点无任何意义。不要多想。有意义的是罗尔中值定理里面的切线平行于A、B点的连线。这个平行于。旋转到拉格朗日定理，仍然是平行。

当用一个函数$g(x)$来代替这里的x，用曲线来代替直线，即$b-a$，代替后$g(b)-g(a)$，$g(x)$连续可导的意义在于其切线不曾垂直于坐标轴$g'(x) \neq \infty$(可导就是极限有固定值，包括0。无穷就是无极限)。$g(x)$的切线可水平于坐标轴，但连接A、B点的直线不能水平。$(g(b)-g(a) \neq 0)$.

基本初等函数有6类: 指数函数、对数函数、幂函数、三角函数、反三角函数、双曲函数.一切初等函数在各自的定义域里全部连续.

函数可导则函数连续，函数连续不一定可导，不连续的函数一定不可导。

如果$f(x)$是在x_0处可导的函数，则$f(x)$一定在x_0处连续，特别地，任何可导函数一定在其定义域内

每一点都连续。反过来并不一定。事实上，存在一个在其定义域上处处连续函数，但处处不可导。

垂线MN的值的函数，若等于0，就是柯西中值定理。不管除数函数$g(x)$如何拖延扭曲，也必将出现两函数的切线同向（不一定顺从直线AB的方向）。

3 柯西中值定理

比值$y' = \frac{\text{因变量}}{\text{自变量}} = \frac{dy}{dx}$

投影：数学术语，指图形的影子投到一个面或一条线上。

3.1 释义1

比值$y = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$，

表示这一条线函数$f(x)$在另一条线函数$g(x)$上的投影函数。

设两个非零向量a与b的夹角为θ，则将$|b| \cdot cos$叫做向量b在向量a方向上的投影或称标投影（scalar projection）。

如果将该函数看作是一条直角坐标系上的曲线的话，那么它的切线的含义就是，一条线函数$f(x)$在一条线函数$g(x)$上的投影函数的变化率。如果是直线，就是拉格朗日中值定理。这个曲线也是由x生成的，与x相关的函数。

3.2 释义2

其几何意义为，用参数方程表示的曲线上至少有一点，它的切线平行于两端点所在的弦。该定理可以视作在参数方程下拉格朗日中值定理的表达形式。

将x作为自变量，那么两个因变量函数$(f(x), g(x))$在直角坐标系上可画出的连续的函数(x, y)曲线。当用参数表达函数这个特殊求导法则，而不是导数的链式法则，链式法则有些嵌套的意思，嵌套循环就是乘法。详见下一章的参数表达函数求导法则。

其中x对应x轴的值，y对应的就是函数值，

那么可以得拉格朗日中值定理：$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{dy}{dx} = (\text{参数表达函数})' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$。

也就是将这$y = F(x), \big(g(x) = f(x)\big)$看作是绳子的两端，那么盘旋之后，首尾因变量相减除以自变量相减，那么同样的斜率一定也会出现至少一次，只要有斜率，就会有切线（这也是三条绳子统一的奥义所在）。其中被除数（第二个函数的导数）不能等于0.那么可以得到柯西中值定理。

从看得见的割线到看不见的切线，是人类认知的进步。比例就是变化率，有自变量就会有因变量，那么因变量在自变量上的投影就是相对变化率。比例就是这个相对变化率的切线。

3.2.1 求导四则运算法则与性质：

1. 若函数u(x), v(x)都可导，则

   $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$,

   $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$,

   $(\frac{u(x)}{v(x)})' = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$.

2. 加减乘都可以推广到n个函数的情况，例如乘法：

   $(u_1 \cdots u_n)' = u_1'(u_2 \cdots u_n) + u_1 u_2'(u_3 \cdots u_n) + \cdots + (u_1 \cdots u_{n-1})u_n'$.

3. 数乘性

作为乘法法则的特例若v(x)为常数c，则$(cu(x))' = cu'(x)$，这说明常数可任意进出导数符号。

4. 线性性

求导运算也是满足线性性的，即可加性、数乘性，对于n个函数的情况：
$\left[\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(X)\right]' = [c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n]' = c_1 f_1' + \cdots + c_n f_n'$

反函数求导法则
若函数$x = \varphi(y)$严格单调且可导，则其反函数$y = f(x)$的导数存在且$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$.
复合函数求导法则
若$u = g(x)$在点x可导，$y = f(u)$在相应的点u也可导，则其复合函数$y = f(g(x))$在点x可导且
$y'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$.

3.2.2 特殊求导法则

对数求导法则:
对于$y(x) = u(x)^{v(x)}$两边取对数（当然取以e为底的自然对数计算更方便），由对数的运算性质：
$ln(y(x)) = v(x)lnu(x)$
再对两边求导
$\frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) = v'(x)lnu(x) + \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x)$，
$y'(x) = u(x)^{v(x)}[v'(x)lnu(x) + \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x)]$.

参数表达函数的求导法则

若参数表达$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varepsilon(t) \end{cases}$，为一个y关于x的函数，

由函数规律的x，而这个x值的那个t要对应唯一的一个y值，才能y为x的函数。由此可见$x = \varphi(t)$必存在反函数$t = \varphi^{-1}(x)$，于是代入$y = \varepsilon(t) = \varepsilon(\varphi^{-1}(x))$，这便是y通过中间变量t的关于x的函数的抽象表达，(实际中未必能写出关于x的反函数式子，也没必要这样做)。

利用反函数求导法则和复合函数求导法则，可得
$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\varepsilon'(t)}{\varphi'(t)}$.
这便是参数方程表达的y关于x的函数的求导公式。
因变量相当于从动，自变量相当于主动。

3.3 释义3

总有一点，两个函数变化率的比值，等于两个函数导数的比值。
柯西中值定理,也叫拓展中值定理。

3.4 定义

定义

如果函数f(x)，g(x)满足：

1. 在闭区间[a, b]上连续

2. 在开区间(a, b)内可导

3. $g'(x) \neq 0 (\forall x \in (a, b))$

则∃ $\xi \in (a, b)$，使得：
$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

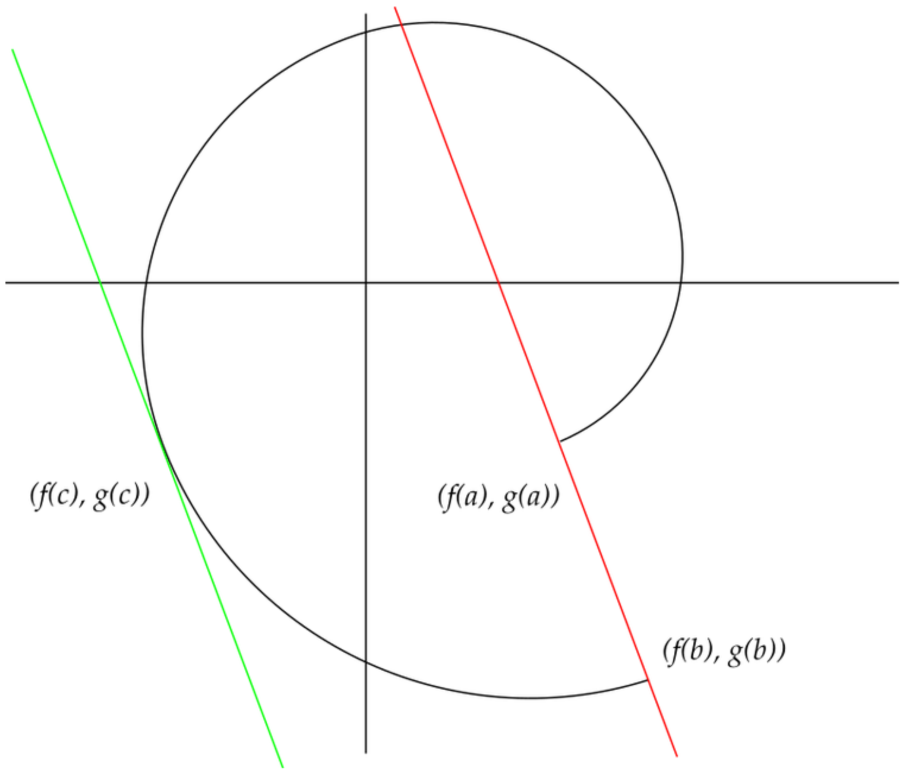

图 4: 柯西中值定理

证明：
由拉格朗日定理，在条件$g'(x) \neq 0$下：
可证：$g(b) - g(a) = g'(\eta)(b - a) \neq 0, \quad \eta \in (a, b)$
作辅助函数
$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$
该函数的由来是斜率函数y-f(a) = k(x - a)
其中斜率$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
其中x代入g(x)，当g(x) = x时，$g'(x) = 1$，可得拉格朗日中值定理。
易证F(x)在[a, b]上满足罗尔定理条件g(a), g(b)代入上式，F(x)都会等于0，从而存在$\xi \in (a, b)$使得$F'(\xi) = 0$即
$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$
由于$g'(\xi) \neq 0$，得到
$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

证明毕。

例如阿基米德螺线的平面笛卡尔坐标方程式为：

$$\begin{cases} x = (\alpha + \beta\theta)\cos\theta \\ y = (\alpha + \beta\theta)\sin\theta \end{cases}$$

下图中：$\alpha = 3, \beta = 4, 0 < \theta < \frac{4}{5} \cdot 2\pi$

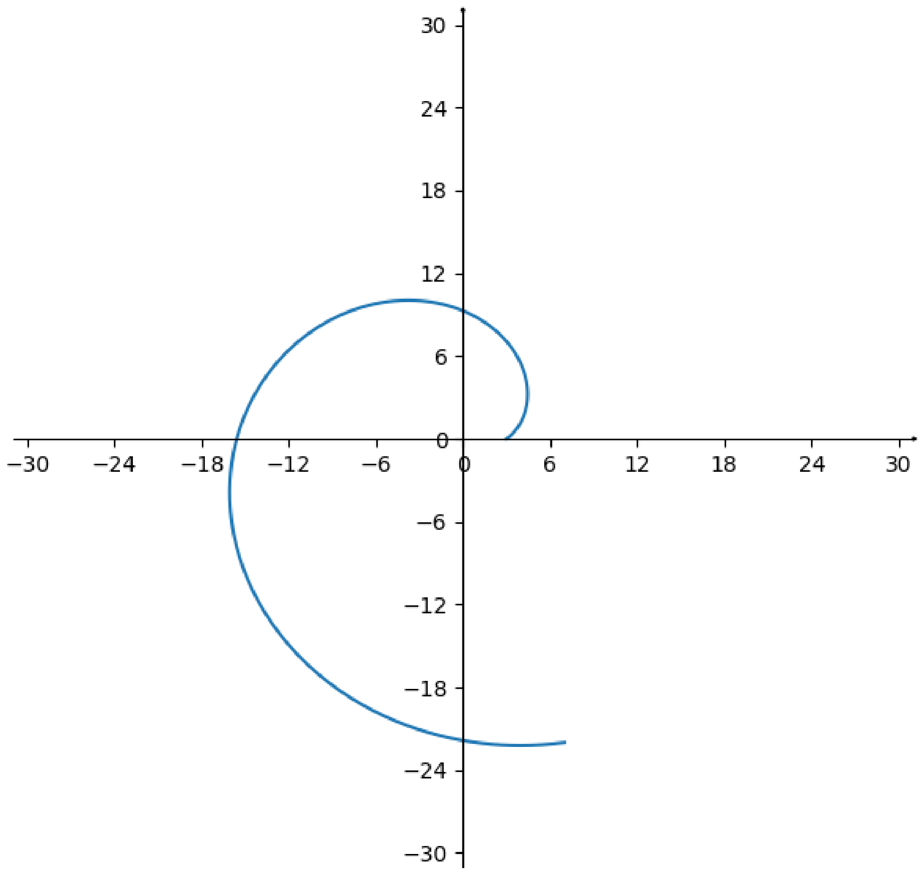

图 5: 柯西中值定理

4 泰勒展开

泰勒公式

对我而言，泰勒公式除了用多项式逼近原函数，可以无限接近原始值之外。还解决了基础的无穷小问题，到底什么是高阶无穷小，有了无穷小的层级，就不怕分不清什么时候可以忽略、什么时候可以放大了。

若函数f(x)在包含x_0的某个闭区间[a, b]上具有n阶导数,且在开区间(a, b)上具有n+1阶导数,则对闭区间[a, b]上任意一点x,成立下式:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)x_0}}{i!}(x-x_0)^i + R_n(x) \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)
\end{aligned}
$$

其中$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}, \quad \xi \in (x_0, x)$

当$n \to \infty$时，$R_n(x) \to 0$，可忽略不计，可以得到函数的另一种表现形式（即用无穷级数表示）。

证明：

设(x_0, x)的情况类似，设函数

$F(t) = f(x) - \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i$

$G(t) = (x-t)^{(n+1)}$

F(t)和G(t)在$[x_0, x]$上连续，在(x_0, x)上可导，且 $F(x) = 0, G(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
F'(t) &= -\sum_{i=0}^{n} \left[\frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i\right]' \\
&= -f(t) - \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(x-t)^i - \frac{f^{(i)}(t)}{(i-1)!}(x-t)^{i-1}\right] \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \\
G'(t) &= -(n+1)(x-t)^n \\
F(x_0) &= f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right] \\
G(x_0) &= (x-x_0)^{(n+1)}
\end{aligned}
$$

并且在(x_0, x)上，$G'(t) \neq 0$，所以F(t)和G(t)在$[x_0, x]$上满足柯西中值定理。

从而$\exists \quad \xi \in (x_0, x)$，使得

$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{0-F(x_0)}{0-G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$

也就是

$\frac{f(x)-\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i}{(x-x_0)^{(n+1)}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

所以

$f(x) - \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$

这常称为f(x)在点x_0的n阶泰勒公式。

证明毕。

当n $= 0$时，上述公式就是拉格朗日中值公式，故泰勒定理就是拉格朗日中值定理的推广。

泰勒展开式满足柯西中值定理。

由柯西中值定理可以证得洛必达法则。

常用函数的泰勒展开：

1. e^x

   $(e^x)' = e^x$，当x_0取0时，

   $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

2. $sinx$

   $sin^{(n)}(x) = sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$，当$x_0$取0时，

   $sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

3. $cosx$

   $cos^{(n)}(x) = cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$，当$x_0$取0时，

   $sinx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

4. $ln(1+x)$

$$
\begin{aligned}
ln'(1+x) &\xlongequal{u=1+x} \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{d(1+x)}{dx} = \frac{1}{1+x} \\
ln''(1+x) &= \left(\frac{1}{1+x}\right)' \xlongequal{u=1+x} \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -1(1+x)^{-2} \\
y''' &= (-2) \cdot (-1)(1+x)^{-3} \\
y'''' &= (-3) \cdot (-2)(-1)(1+x)^{-4} \\
y^{(n)} &= (-1)^{(n+1)} \cdot (n-1)!(1+x)^{-n}
\end{aligned}
$$

   $ln^{(n)}(1+x) = -(1)^{(n+1)} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$，当$x_0$取0时，

   $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} x^n - \cdots$

5. $ln(1-x)$

   $ln^{(n)}(1-x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$，当$x_0$取0时，

   $ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots$

6. $\frac{1}{1-x}$

   $(\frac{1}{1-x})^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$，当$x_0$取0时，

   $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \forall x : |x| < 1$

5 高阶无穷小

如果没有高阶无穷小那么就不能加等号了。

举个例子：

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

两边求导为e^x等于

$0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

发现没有，如果没有高阶无穷小，那么求导之后就比之前少了一个$\frac{x^n}{n!}$，如果无限求导可以发现e^x等于0这种错误的结论，所以高阶无穷小不可缺少，缺少了就只能说是近似，不能说等于。

拉格朗日余项与皮亚诺余项。

定性的如皮亚诺余项$o(x-x_0)^n$，仅表示余项是比$(x-x_0)^n$（当$x \to x_0$时）高阶的无穷小。

如$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$，表示当x趋近于0 时， sinx用$x - \frac{x^3}{3!}$近似，误差（余项）是比$x^3$高阶的无穷小。

定量的如拉格朗日型余项中的ξ也可以写成$x_0 + (x - x_0)$。定量的余项一般用于函数值的计算与函数形态的研究。

6 洛必达法则(套娃法则)

假设函数f(x)和g(x)满足下列条件：

1. f(x), g(x)都在a点的某去心邻域$\mathring{U}(a)$上可导，且$g'(x) \neq 0 (\forall x \in \mathring{U}(a))$
2. 当$x \to a$时，$f(x) \to 0, g(x) \to 0$或$f(x) \to \infty, g(x) \to \infty$
3. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$存在（也可以是$\infty$）

则$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
证明：
由于$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$与f(x), g(x)在a点的取值无关，我们可以设f(a) = 0, g(a) = 0，则
f(x), g(x)在a的某一邻域内连续。
设$x \in \mathring{U}(a)$，由定理的条件1，f(x)和g(x)在[a, x](或[x, a])上满足柯西中值定理的条件，从而存在$\xi \in (a, x)$(或(x, a))，使得
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$
当$x \to a$时，$\xi \to a$，所以
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
证明毕。
在条件1，2下，只要$\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$或$\infty$，则$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$必存在，且就等于$A$或$\infty$

所以为了确定$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$的值，只要把分子、分母分别求导再取极限，在这个极限存在（或是∞）的情况下，就可以确定原来未定式的值（或是∞）

这种确定未定式的值的方法称为洛必达法则

试用洛必达法则时必须注意：

1. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$必须是$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型
2. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或是$\infty$）

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在时需要用其他方法判断这个极限是否存在

7 高阶导数的记法

不是推导出的，是记法，回答如图：
二阶导数：$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d^2}{dx^2}$
三阶导数：$\frac{d}{dx}\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^3}{dx^3}$
四阶导数：$\frac{d}{dx}\frac{d^3}{dx^3} = \frac{d^4}{dx^4}$
五阶导数：$\frac{d}{dx}\frac{d^4}{dx^4} = \frac{d^5}{dx^5}$

莱布尼茨公式：

设函数u(x), v(x)具有n阶导数，则

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$,
2. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$,
3.
$$\begin{aligned}(u \cdot v)^{(n)} &= u^{(n)}v \cdot nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}\end{aligned}$$

链式法则和反函数里面的$\frac{dy}{dx}$是真的可以用分数除法以及分数乘法消掉的。

8 欧拉-拉格朗日定理（方程）

因为涉及到光子的运动和能量级传输。所以在波粒二象性、动能势能转换、自旋方面。有着重要理论基础。多元函数代替参数方程，用偏导数、投影来解释的拉格朗日中值定理，就是欧拉-拉格朗日方程。