巴塞尔问题

小圆滚滚

1 倒数勾股定理

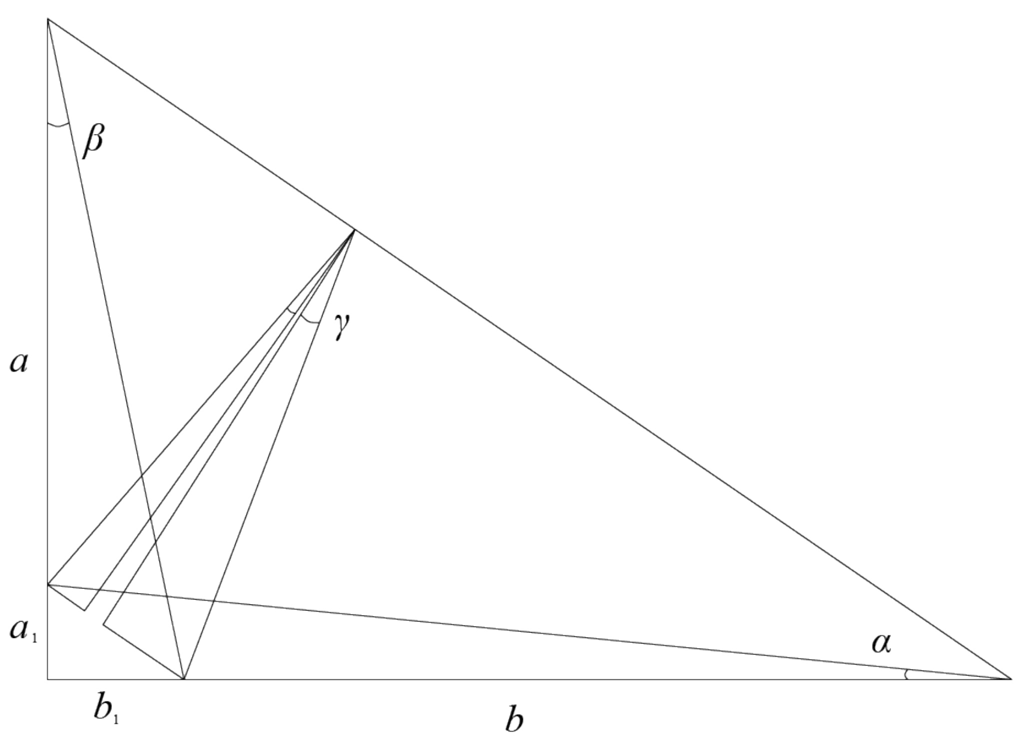
$$Area = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$$
$$a^2b^2 = c^2h^2$$
$$a^2b^2 = (a^2+b^2)h^2$$
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}$$

2 巴塞尔问题

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$

3 在无穷小的情况下角度加法的证明

如图：



$tg\alpha = \frac{a_1}{b} \sim \alpha$

$tg\beta = \frac{b_1}{a} \sim \beta$
$sin\gamma = \frac{c_1}{h} \sim \gamma$

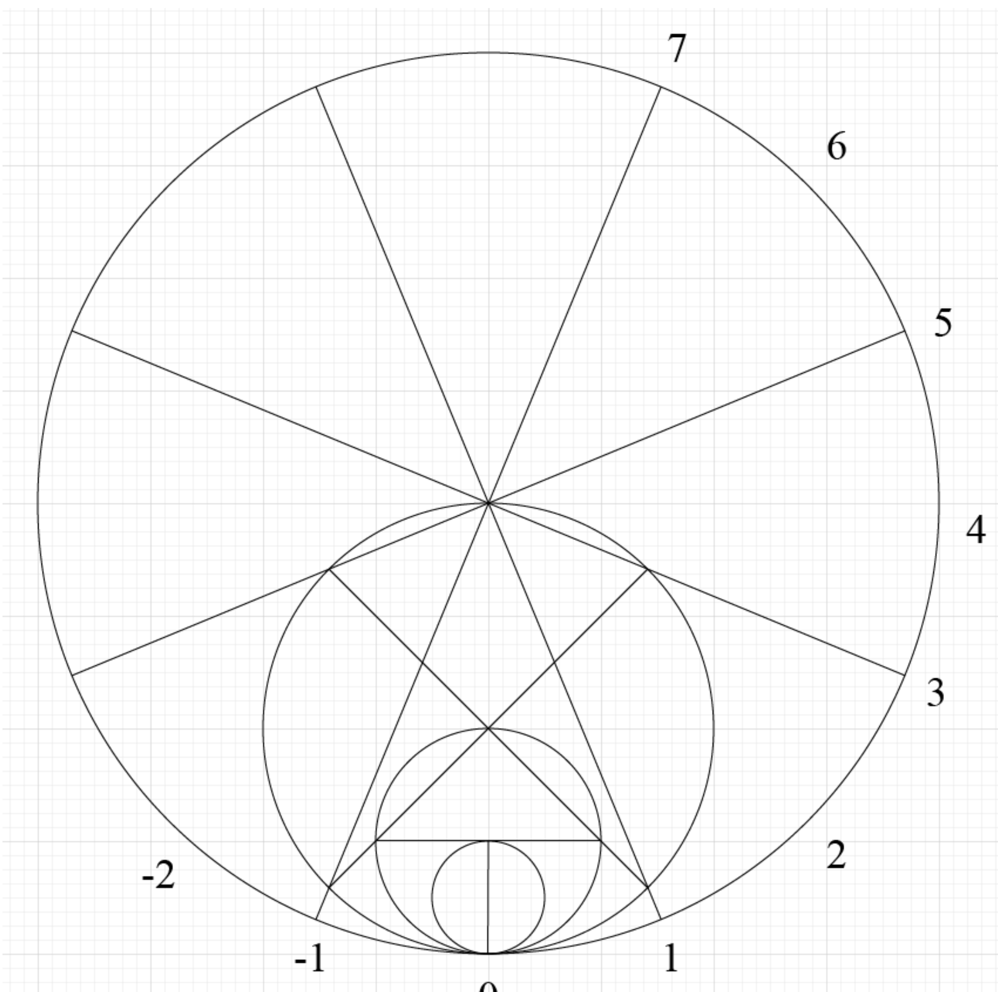
$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta = \frac{a_1}{b} + \frac{b_1}{a} &= \frac{a_1 a + b_1 b}{ab} \\ ab &= ch \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a_1 a + b_1 b}{ch} = \frac{a_1 \frac{a}{c} + b_1 \frac{b}{c}}{h} = \frac{a_1 sin\theta + b_1 cos\theta}{h}$$

$a_1 = c_1 sin\theta, b_1 = c_1 cos\theta$代入上式，得：
$\frac{a_1 sin\theta + b_1 cos\theta}{h} = \frac{c_1 sin^2\theta + c_1 cos^2\theta}{h} = \frac{c_1}{h} = \gamma$
可见在屏幕足够小时， $\gamma = \alpha + \beta$
也就是两个相似三角形的角度相加等于三角形高的顶点照射屏幕的角度。

4 灯塔由一个圆扩大到一条线

推论：距离n个单位长度的一块太阳能板获得的能量是距离1个单位的一块太阳能板获得的能量的$\frac{1}{n^2}$.也就是说距离每增加一步，能量减少成为步数的平方。很直观的把距离和能量用数学联系了起来。

当一个周长为2的圆的直径上，放置一个灯塔和一个用户的时候，用户距离灯塔$\frac{2}{\pi}$个单位距离。如果距离1的能量设为单位能量，那么该用户获得灯塔的能量是$\frac{1}{(\frac{2}{\pi})^2} = \frac{\pi^2}{4}$



$\cdots+\frac{1}{-5}+\frac{1}{-3}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots=\frac{\pi^2}{4}$

我们只取数轴上正的部分，可得

$\frac{1}{1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$

设计一下，可以找出偶数数列的求和（级数）规律：

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{1}{(1\times2)^2}+\frac{1}{(2\times2)^2}+\frac{1}{(3\times2)^2}+\cdots=(\frac{1}{1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots)\frac{1}{4}$

为了使量级相同，可以用代数推理表示为：

设第一批数为：奇数的平方的倒数的和，比如到3个，为

$A=\frac{1}{1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}$

设第二批数为：偶数的平方的倒数的和，比如到3个，为

$B=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}$

设第三批数为：正整数的平方的倒数的和，比如到6个，为

$C=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}$

则，同级别、同个数的情况下：

$B=C\times\frac{1}{4}$（但是显然，C的个数要比B的多一倍）

又$\because C=A+B$

$\therefore A=C\times\frac{3}{4}$

反推出：

$C=A\times\frac{4}{3}=\frac{\pi^2}{8}\frac{4}{3}=\frac{\pi^2}{6}$