无穷小：古典微积分向极限微积分进化的导火索

小圆滚滚

学习高等数学时，我相信不少同学都有以下疑惑：

（1）对于链式求导法则$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$，是否可以理解为约去，所以等号左右两边相等？

（2）$\int_a^b \frac{dy}{dx}dx=\int_a^b dy=y\Big|_a^b$，是不是直接消去了dx？

今天的这篇文章，将为大家解答上述两个问题。

微积分起初是由牛顿和莱布尼茨以无穷小概念为基础建立起来的，可称之为“古典微积分”。古典微积分最大的好处是很直观，但因为无穷小存在着严重的缺陷，以此为基础的古典微积分一直被人们质疑和攻击。所以在他们的晚期都不同程度地接受了极限思想。

当时，极限这一概念也缺乏严格的定义，且依然无法摆脱无穷小的影子。直至19世纪，维尔斯特拉斯提出了极限的静态的定义，给微积分提供了严格的理论基础。直到今天我们高等数学课本中的极限定义来源于此。

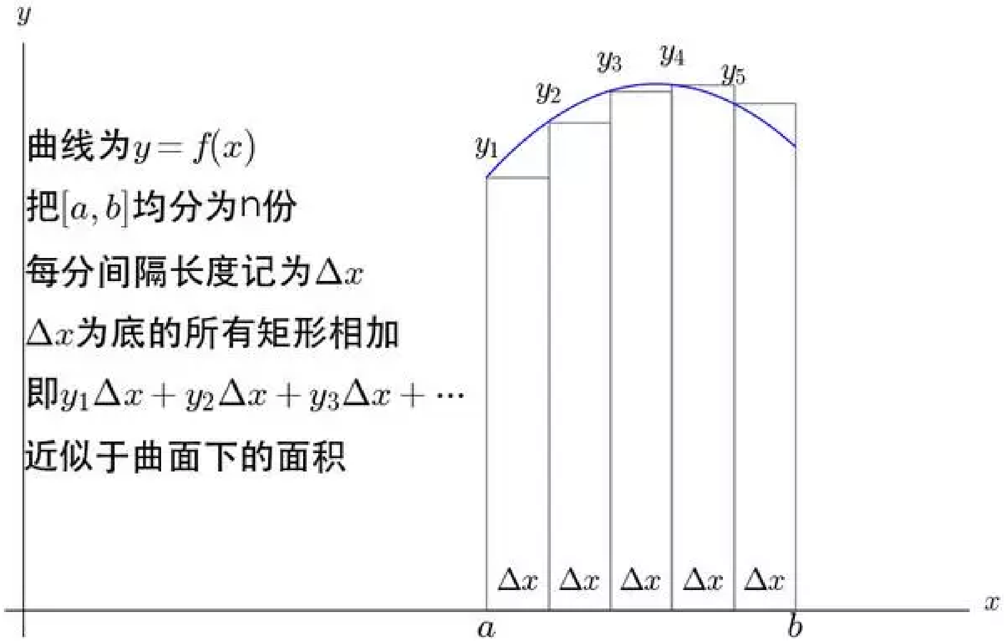
1 古典微积分

牛顿和莱布尼兹各自独立发明了以无穷小概念为基础的微积分，下面我采取莱布尼兹的微积分符号进行说明。

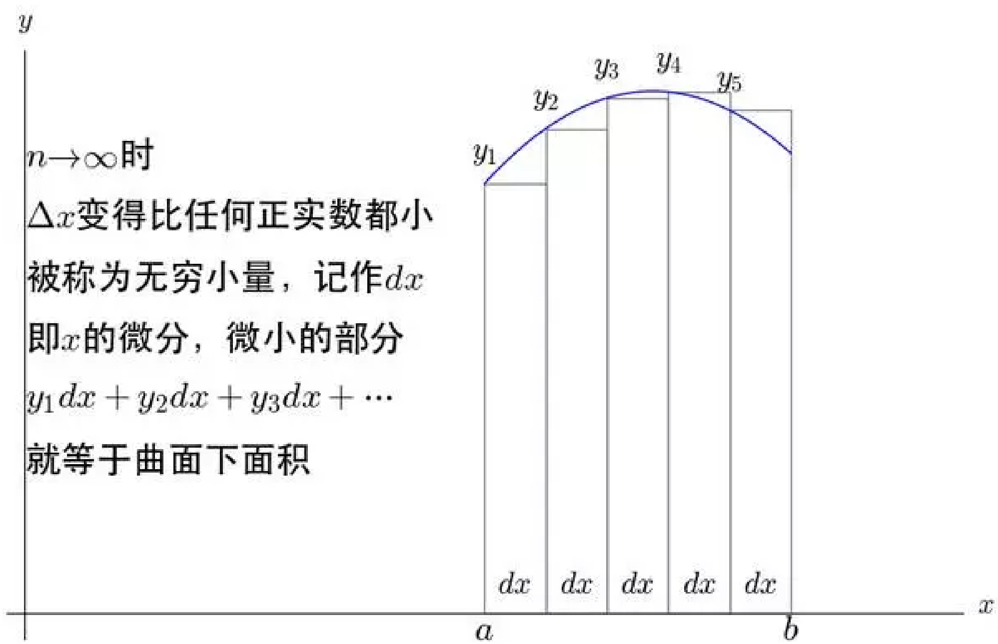
1.1 导数为什么出现？

导数的出现不是牛顿和莱布尼兹发明的，之前数学家已经在对曲线的切线进行研究了，但是牛顿

和莱布尼兹在解决曲面下面积的时候把导数的定义确定下来了。曲线下的面积在微积分出现之前是一个很复杂的问题，微积分求解的主要思想是把线下的面积划分成了无数个矩形面积之和：



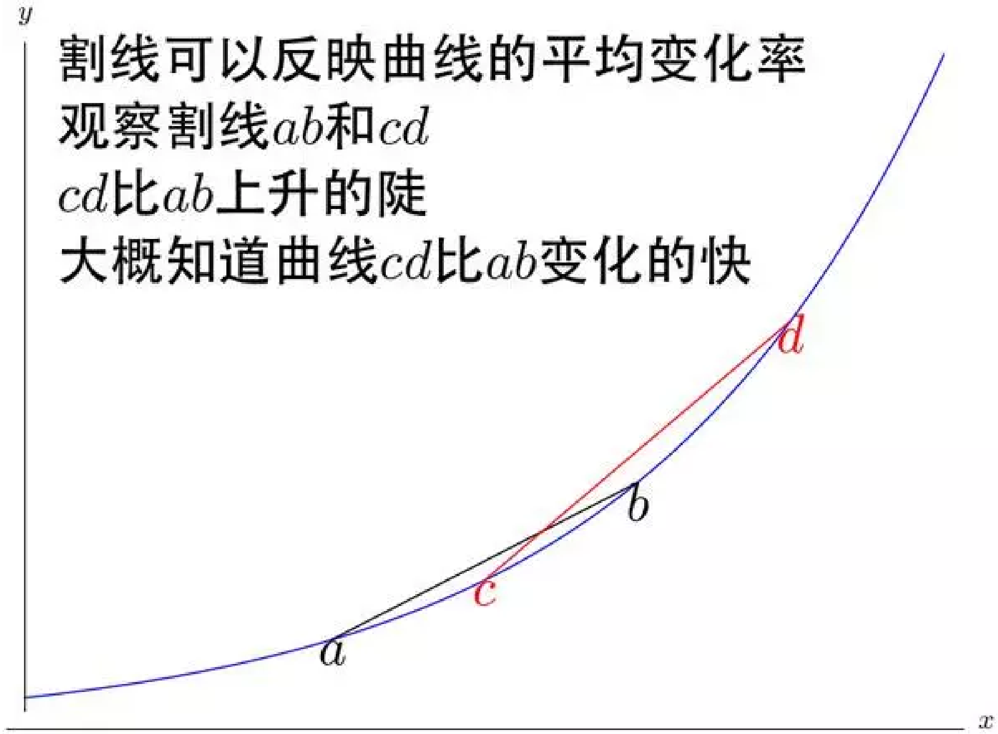
直觉告诉我们，如果n越大，则这个近似越准确：



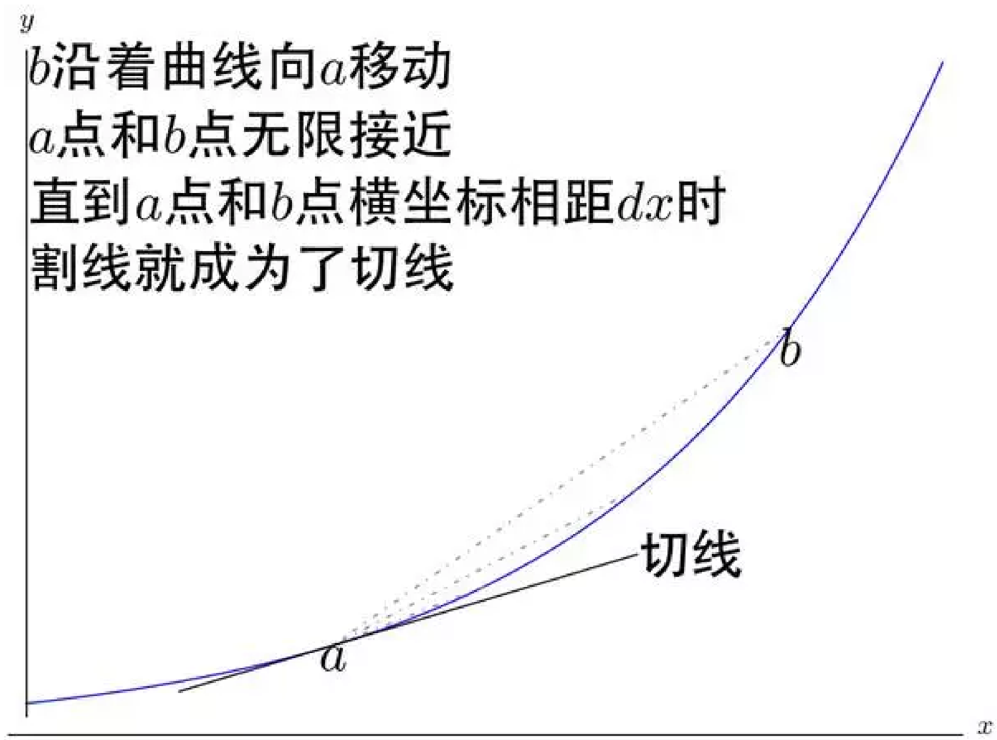
无穷小量就在这里出现了，无穷小量是建立微积分的基础。在具体计算曲面下面积，即我们现在所说的定积分的时候，必然会遇到导数的问题，所以很自然的开始了对导数的定义和讨论。

1.2 导数的古典定义

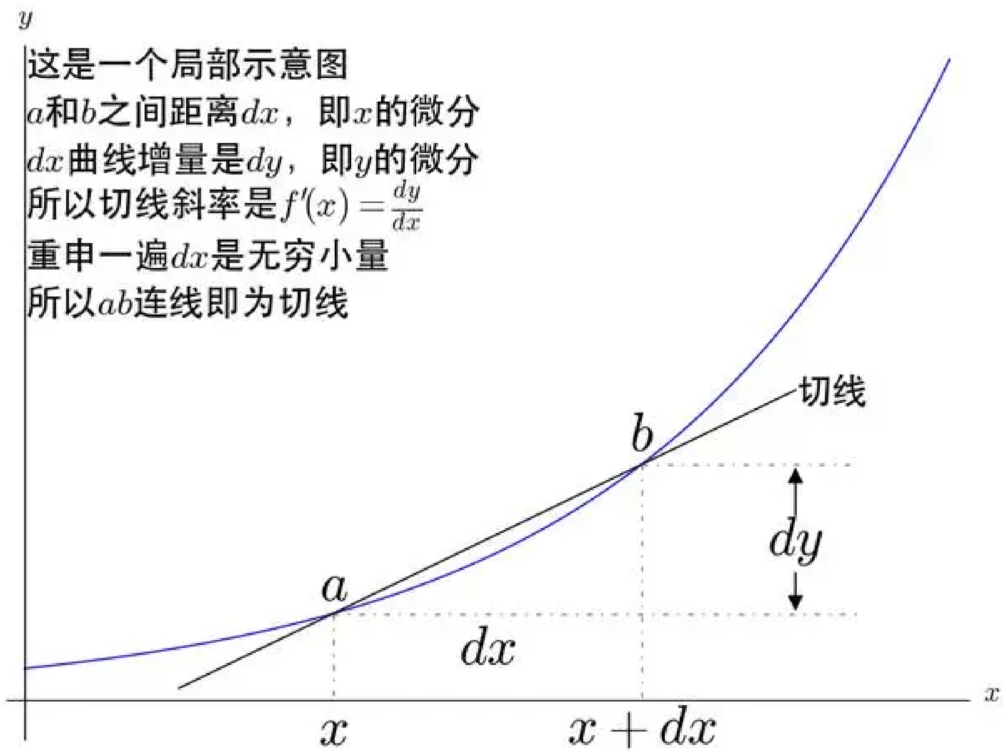
在曲线上取两点，连接起来，就称为曲线的割线：



割线可以反应曲线的平均变化率，也就是说这一段大概总的趋势是上升还是下降，上升了多少，但是并不精确。



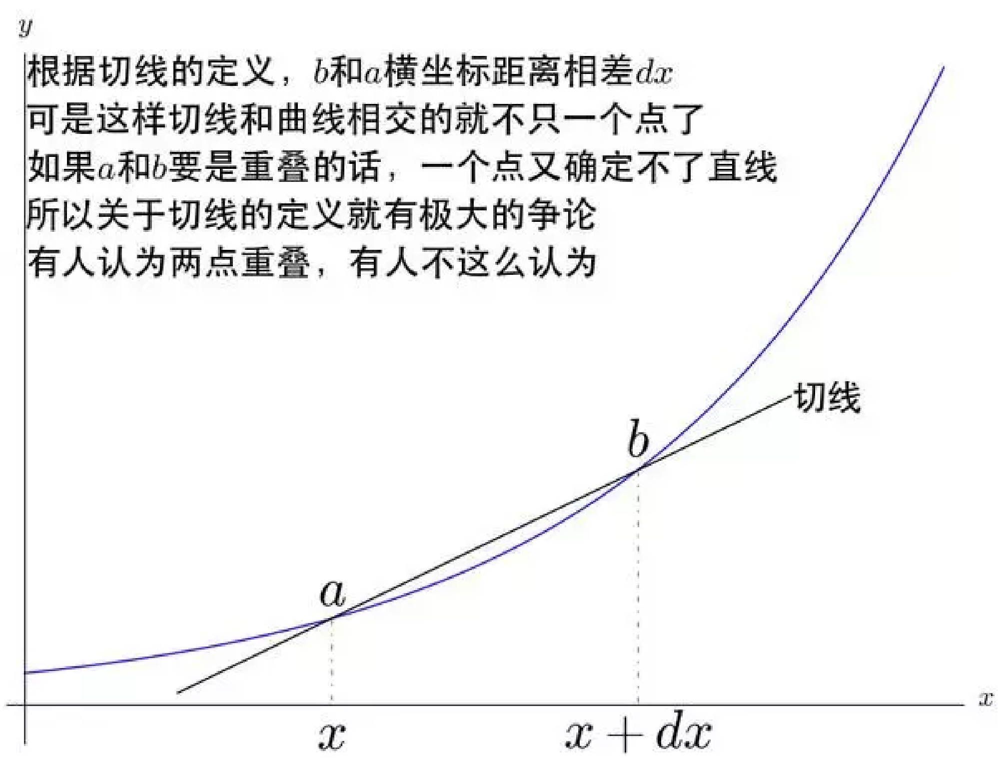
有了切线之后我们进一步去定义导数：



从这张图得出导数的定义，而和被称为和的微分，都为无穷小量，所以导数也被莱布尼兹称为微商（微分之商）。

1.3 无穷小量导致的麻烦

上一节的图实际上是有矛盾的：



所以就切线的定义而言，微积分的基础就是不牢固的。

无穷小量的麻烦还远远不止这一些，$f(x) = x^2$ 的导数是这样计算的：

$$\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^2) \\
&= \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \\
&= \frac{(x+dx)^2-x^2}{dx} \\
&= \frac{x^2+2x \cdot dx+(dx)^2-x^2}{dx} \\
&= \frac{2x \cdot dx+(dx)^2}{dx} \Leftarrow dx \neq 0 \\
&= 2x+dx \Leftarrow dx = 0 \\
&= 2x
\end{aligned}$$

仔细看看运算过程，dx先是在约分中被约掉，然后又在加法中被忽略，就是说，先被当作了非0的量，又被当作了0，这就是大主教贝克莱（就是在高中政治书被嘲笑的唯心主义的代表）所攻击的像幽灵一样的数，一会是0，一会又不是0；此外，无穷小量和无穷小量相除为什么可以得到不一样的值，难道不应该都是1？更严重的是，无穷小量还违反了阿基米德公理，康托尔证明过，如果阿基米德公理被违背的话会出大问题。

一边是看起来没有错的微积分，一边是有严重缺陷的无穷小量，牛顿和莱布尼茨以无穷小概念为基础建立起来的微积分理论，其严格性受到了挑战。

“对于数学，严格性不是一切，但是没有了严格性就没有了一切”。

1.4 对于古典微积分的总结

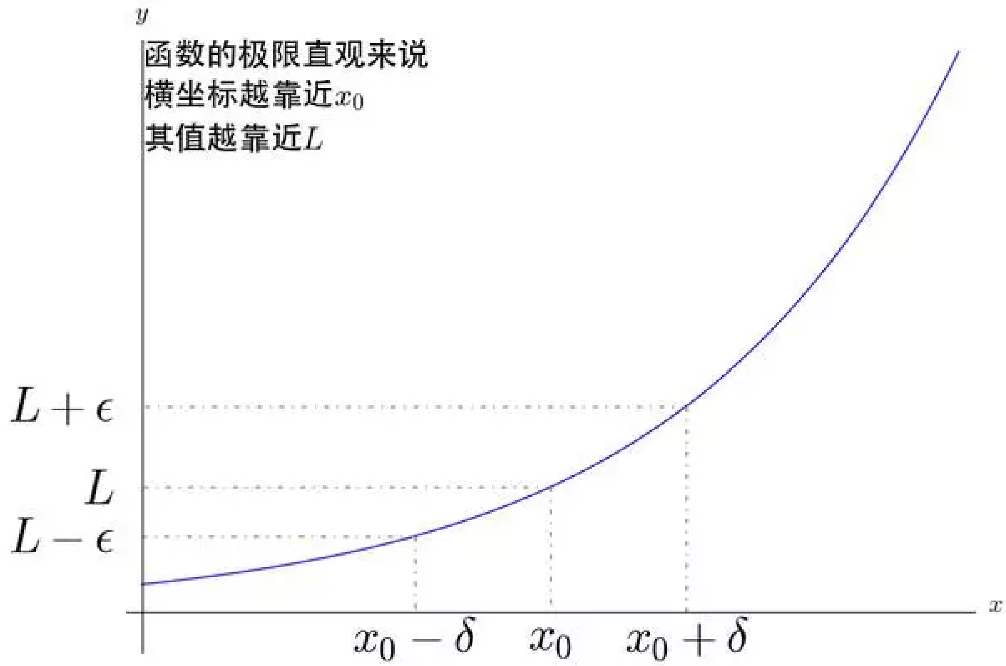
- 切线：通过无穷小量定义了切线
- 导数：导数就是切线的斜率
- 微分：微分是微小的增量，即无穷小量

2 基于极限重建微积分

无穷小量导致的麻烦，数学家们一直都想要修补，但是这个问题要等到200年后。19世纪极限概念的清晰之后，这一问题才得到解决，即完全摈弃无穷小量，基于极限的概念，重新建立了微积分。

2.1 极限

现在用$\varepsilon-\delta$语言来定义的极限，仍然是被誉为“现代分析之父”的19世纪德国数学家维尔斯特拉斯给出的，如下图所示。可以看到，极限的描述并没有用到什么无穷小量。



2.2 导数的极限定义

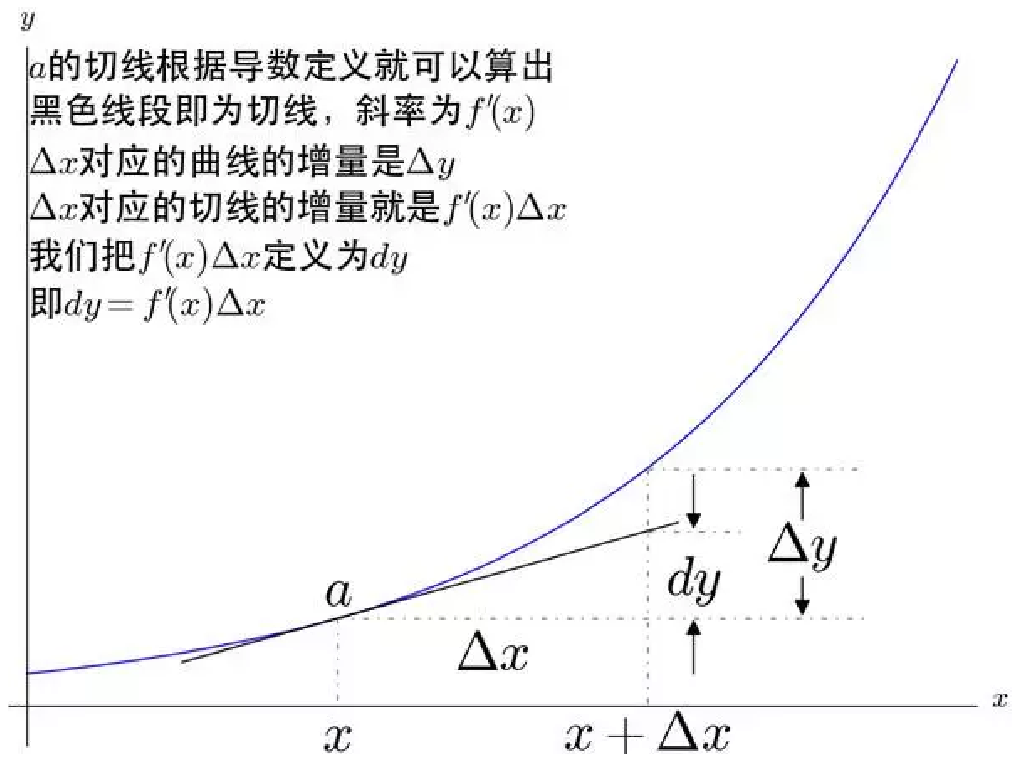
$$
\begin{aligned}
f'(x_0) = \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+x_0)-f(x)}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

用极限重新严格定义了导数，已经脱离了微商的概念，此时，导数应该被看成一个整体。(现在的高等数学教材中，清一色地用极限定义导数。了解了古典微积分和极限微积分后，你应该知道为什么了吧)

不过我们仍然可以去定义什么是微分，说到这里，真是有点剧情反转，原来是先定义了微分再有的导数，现在却是先定义了导数再有的微分。

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) &\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = a, \lim_{\Delta x\to 0} a = 0 \\
&\Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + a\Delta x
\end{aligned}
$$

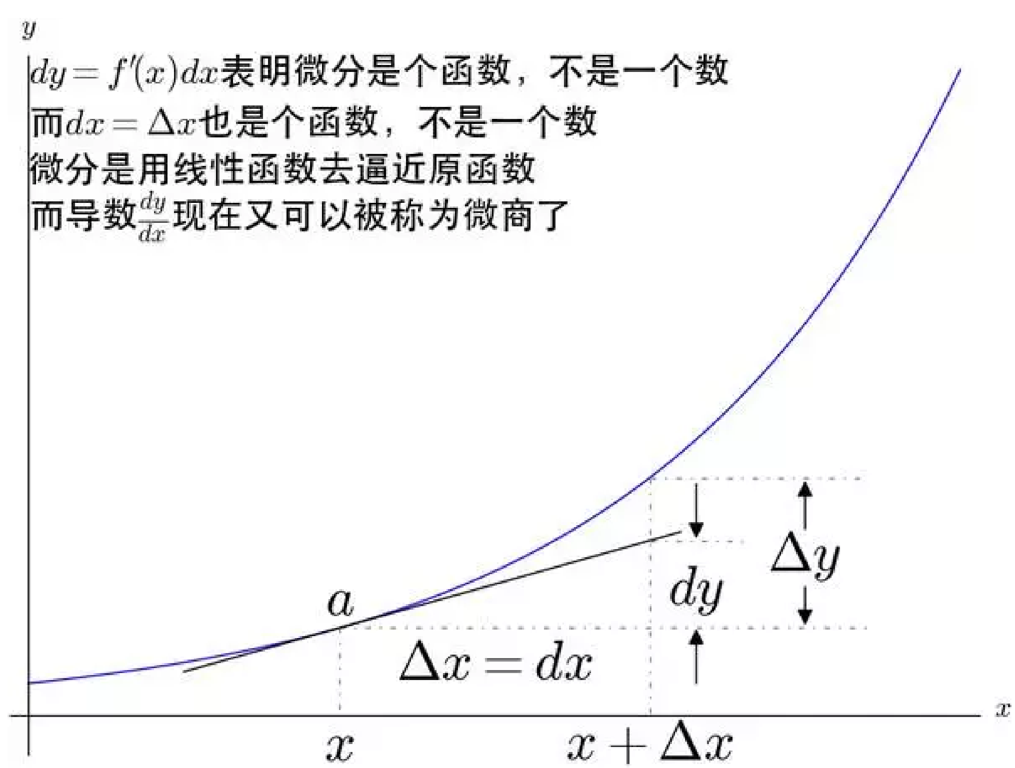
由$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + a\Delta x$可以得出，$\Delta y$ 由两部分组成，通过图来观察一下几何意义。



这里，我们给出微分的定义：

$$\begin{cases} dy = & f'(x)\Delta x \\ dx = & \Delta x \end{cases}$$

最后我们可以得到：$dy = f'(x)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$



2.3 对于极限微积分的总结

- 导数：被定义为一个极限，其意义就是变化率
- 微分：是一个线性函数，其意义就是变化的具体数值
- 切线：有了导数之后就可以被确定下来了

3 常见疑问的解答

微积分实际上被发明了两次，古典微积分和极限微积分可以说是两个东西。我们再来比较一下古典微积分和极限微积分。

3.1 古典微积分与极限微积分的对比

- 古典微积分是先定义微分再定义导数，极限微积分是先定义导数再定义微分。
- 古典微积分的导数是基于无穷小量定义的，极限微积分的导数是基于极限定义的。
- 古典微积分的微分是无穷小量，极限微积分的微分是一个线性函数。
- 古典微积分的定积分是求无穷小矩形面积的和，极限微积分的定积分是求黎曼和。
- 古典微积分的切线是可以画出来的，极限微积分的切线是算出来的。
- 古典微积分的建立过程很直观，极限微积分的建立过程更抽象。

古典微积分最大的好处就是很直观，不过也是因为太直观了，所以我们一直都无法忘记它带来的印象，也对我们理解极限微积分造成了障碍。也让我们在实际应用中造成了错误的理解。

3.2 疑问的解答

问：对于链式求导法则$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$，是否可以理解为约去，所以等号左右两边相等？

答：在古典微积分中，可以理解为消去，但是在极限微积分中我们应该认识到，这两个实际上是不同的线性函数（不是一个数），因此不能消去。

问：$\int_a^b \frac{dy}{dx} dx = \int_a^b dy = y\big|_a^b$，这里是不是直接消去了dx？

答：古典微积分中，dx确实表明是无穷多个矩形的底边，消去也是合理的；而极限微积分中，$\int_a^b dx$是求黎曼和，我们可以把$\int_a^b$当作左括号，dx当作右括号，就好比(2+6)=8，计算完毕之后，括号自然就消失了。

在现在的高等数学课本中，古典微积分其实已经被摒弃了，我们应该知道这一点，即使有些老师讲述极限微积分时，为了便于理解，加入了古典微积分的几何理解，但我们要清楚重新从极限的角度去认识微积分。

资料来源

知乎：马同学

微积分读本（普林斯顿）

微积分（施皮格尔）