洛伦兹变换

小圆滚滚

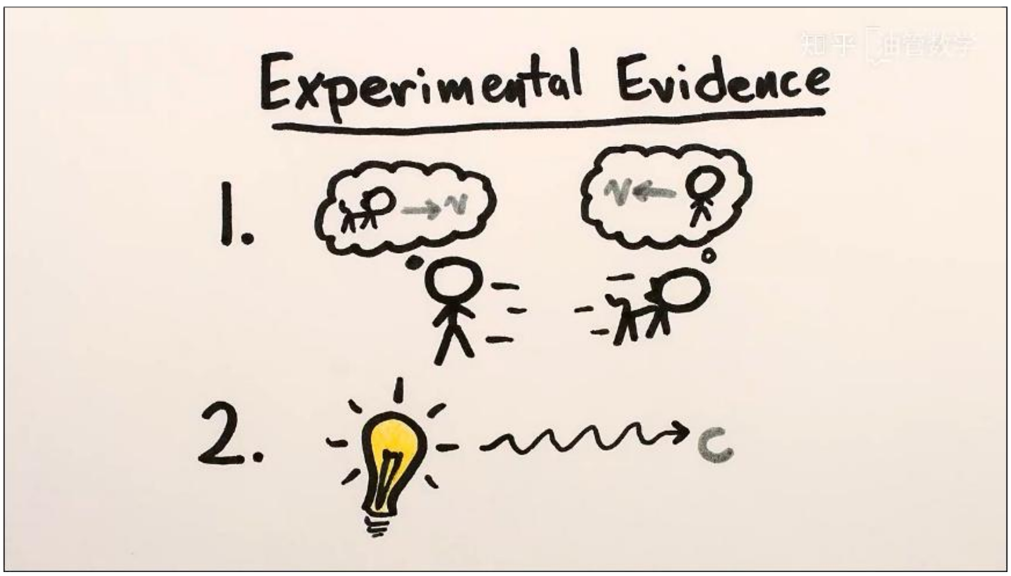
1 证明环境

1.惯性系、空间均匀、空间各向同性，则有相对性原理

物理定律在所有惯性系中都具有相同的表达形式。

2.光速不变

真空中的光速是常量，沿各个方向都等于c，与光源或观测者的运动状态无关。



光速不变的误区：光速与光源速度无关。所以并不是站在火车上棍子另一端的小球就会有速度。如果棍子绑着的是喇叭，那么波的特性，波速和波源速度没啥关系。

两个参考系 S 和 S' 间的变换最一般的形式是（一维情况）：

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ t' = g(x,t) \end{cases} \tag{1}$$

为讨论方便，不失一般性，可设在S系看来，S'系以速率v沿x 轴正方向做匀速直线运动；在S'系看来，S系以速率v沿x轴负方向（即速度为-v）做匀速直线运动。并且设在 t=t'=0 时刻，两参考系的原点重合。

（1）式两边同时微分：

$$\begin{cases} dx' = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt \\ dt' = \frac{\partial g(x,t)}{\partial x}dx + \frac{\partial g(x,t)}{\partial t}dt \end{cases} \tag{2}$$

（2）中上式除以下式得：

$$\frac{dx'}{dt'}=\frac{\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt}{\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}dx+\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}dt} \tag{3}$$

（3）式右侧分子分母同除以dt可得简化式：

$$\frac{dx'}{dt'}=\frac{\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}}{\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}} \tag{4}$$

其中 $\frac{dx}{dt}=u$ ，物理意义是原惯性系 S 中物体的速度。

其中$\frac{dx'}{dt'}=u'$，物理意义是变换后惯性系 S' 中物体的速度。

即：

$$u'=\frac{\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}u+\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}}{\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}u+\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}} \tag{5}$$

（5）式即两个惯性系中速度变换的公式。

用系数代替偏导数，

$$u'=\frac{k_{11}u+k_{12}}{k_{21}u+k_{22}}$$

根据相对性原理，

1.在S惯性系以v运动的物体，如果　在S'惯性系中看着都　是静止；

2.那么　在S惯性系　静止　的物体，　在S'惯性系中看着都　以-v运动；

以上两点，均和坐标位置无关。

$$\begin{cases} 0==\frac{k_{11}v+k_{12}}{k_{21}v+k_{22}} \\ -v==\frac{k_{11}\times 0+k_{12}}{k_{21}\times 0+k_{22}}==\frac{k_{12}}{k_{22}} \end{cases} \tag{6}$$

根据光速不变原理，u=c, (u’也等于)u’=c，

$$c=\frac{k_{11}c+k_{12}}{k_{21}c+k_{22}} \tag{7}$$

由（2）式中

$$dx'=\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt=k_{11}dx+k_{12}dt \tag{8}$$

根据同一种规律在不同惯性系下的表达，另一个惯性系下的规律与当前惯性系下的规律一致。（相对性原理）。

两个惯性坐标系之间的、保证空间坐标原点在 t=t’=0时重合的坐标变换称为洛伦兹变换。

即简单一维运动的世界线应该与时空图x轴表示空间单位距离，t表示时间，中x=0的线重合。变换后两个惯性系的时空图间隔和角度应该互相对应。

当dt=0时，

$$dx' = k_{11}dx + k_{12} \times 0 = k_{11}dx \tag{9}$$

由（2）式中

$$dt' = \frac{\partial g(x,t)}{\partial x}dx + \frac{\partial g(x,t)}{\partial t}dt = k_{21}dx + k_{22}dt \tag{10}$$

当dt'=0时，$0 = k_{21}dx + k_{22}dt$
于是：$dt = -\frac{k_{21}dx}{k_{22}}$，代入（8）得：

$$dx' = k_{11}dx + k_{12} \times -\frac{k_{21}dx}{k_{22}}$$

即

$$dx = \frac{1}{k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}}dx' \tag{11}$$

（9）（11）联立，若满足相对性原理，则应该有：

$$k_{11} = \frac{1}{k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}} \tag{12}$$

由（方程6）（方程7）（方程11）
解得

$$k_{11} = -\frac{c}{\sqrt{(c-v)(c+v)}}, k_{12} = \frac{cv}{\sqrt{(c-v)(c+v)}}, k_{21} = \frac{v}{c\sqrt{(c-v)(c+v)}}, k_{22} = -\frac{c}{\sqrt{(c-v)(c+v)}}$$

,

即

$$k_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, k_{12} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v, k_{21} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{v}{c^2}, k_{22} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

代入（8）（10），可得全微分式：

$$dx' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dx - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}vdt$$

因为全微分可以积分，且，当x=0时x'=0,当t=0时t'=0,所以可得洛仑兹变换!!!：

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}x - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}vt$$

由于 $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ 都是常数，与x, t无关，所以洛仑兹变换是线性的。

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{k_{11}V + k_{12}}{k_{21}V + k_{22}} \\[2ex] -V = \dfrac{k_{12}}{k_{22}} \\[2ex] C = \dfrac{k_{11}C + k_{12}}{k_{21}C + k_{22}} \\[2ex] k_{11} = \dfrac{1}{k_{11} - \dfrac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}} \end{cases}$$

$$k_{11} = \frac{-k_{12}}{V} \qquad k_{12} = -k_{11}V$$

$$k_{12} = -k_{22} \cdot V \qquad k_{22} = -\frac{k_{12}}{V} = -\frac{-k_{11}V}{V}$$

$$= -k_{11}V \qquad = k_{11}$$

$$C = \frac{k_{11}C + (-k_{11}V)}{k_{21}C + k_{11}} \qquad k_{21}C^2 + \cancel{k_{11}C} = \cancel{k_{11}C} - k_{11}V$$

$$k_{11} = \frac{1}{k_{11} - \dfrac{(-k_{11} \cdot V) \cdot k_{21}}{k_{11}}} \qquad k_{11} = \frac{1}{k_{11} + k_{21}V}$$

$$\begin{cases} k_{21}C^2 = -k_{11}V & k_{11} = -\dfrac{k_{21}C^2}{V} \\[2ex] k_{11} = \dfrac{1}{k_{11} + k_{21}V} & k_{11} + k_{21}V = \dfrac{1}{k_{11}} \end{cases} \text{代入}$$

$$-\frac{k_{21}C^2}{V} + k_{21}V = -\frac{V}{k_{21}C^2}$$

$$\frac{k_{21}C^2}{V} - k_{21}V = \frac{V}{k_{21}C^2}$$

$$k_{21}^2\left(\frac{C^2}{V} - V\right) = \frac{V}{C^2} \qquad k_{21}^2\left(\frac{C^2 - V^2}{V}\right) = \frac{V}{C^2} \qquad k_{21}^2 = \frac{V^2}{C^2(C^2 - V^2)} = \frac{V^2}{C^2 \cdot C^2\left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)}$$

$$k_{21} = \frac{V}{C^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}$$

系数简化：$\beta = \dfrac{V}{C}$ $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}$

$$\begin{bmatrix} C\Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$