矩阵和行列式

小圆滚滚

1 3Blue1Brown

3Blue1Brown的线性代数用的是解析几何面积来由矩阵引入行列式。由坐标系，基的选取不同，产生不同的坐标系，相对于单位正交基（以下简称”原坐标系”），选取两个在单位正交基上的向量作为新的基，向量用纵向的数列表示。两个向量并排向右，表示一个变换矩阵，利用这个变换矩阵左乘一个在原坐标系可以在新的坐标系(”新坐标系”)，找到对应的向量。

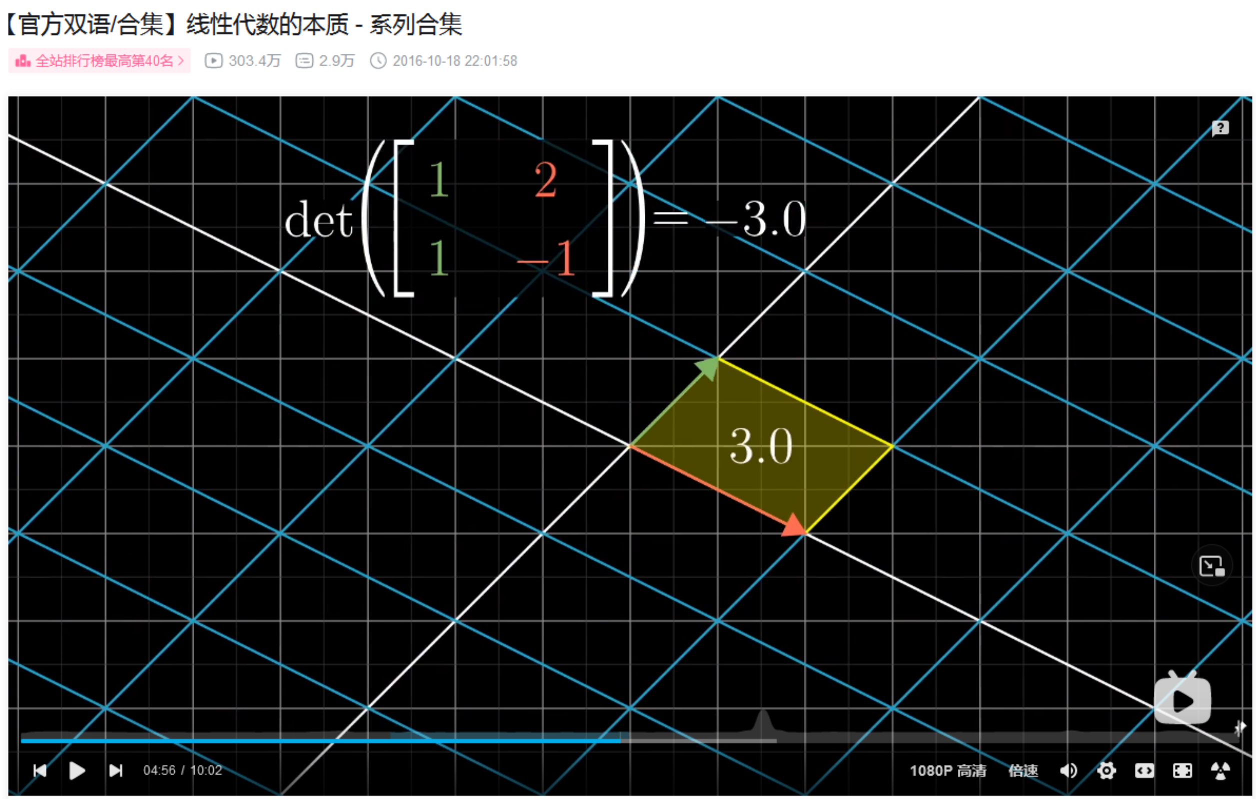

图 1: 行列式是面积的变换

2 同济大学

同济大学第七版用的是方程引入行列式，用行列式的性质引入矩阵。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \quad (6)$$

(6)式称为数表(5)所确定的三阶行列式.

上述定义表明三阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循图 1.2 所示的对角线法则:图中有三条实线看做是平行于主对角线的连线,三条虚线看做是平行于副对角线的连线,实线上三元素的乘积冠正号,虚线上三元素的乘积冠负号.

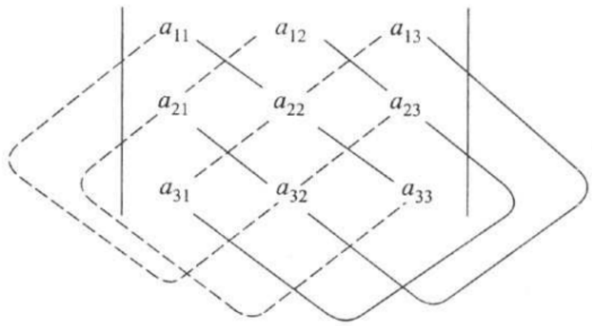

图 2: 行列式是方程组系数

从一个变量x1...xn到变量y1...yn的线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ y_n = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

向量$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$变为$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$的变换

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x + a_{12}y \\ y_1 = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

3Blue1Brown中：

举例：旋转变化

$$\begin{cases} x_1 = xcos\varphi - ysin\varphi \\ y_1 = xsin\varphi + ycos\varphi \end{cases}$$

对应的矩阵就是

$$\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$$

对应3Blue1Brown的视频

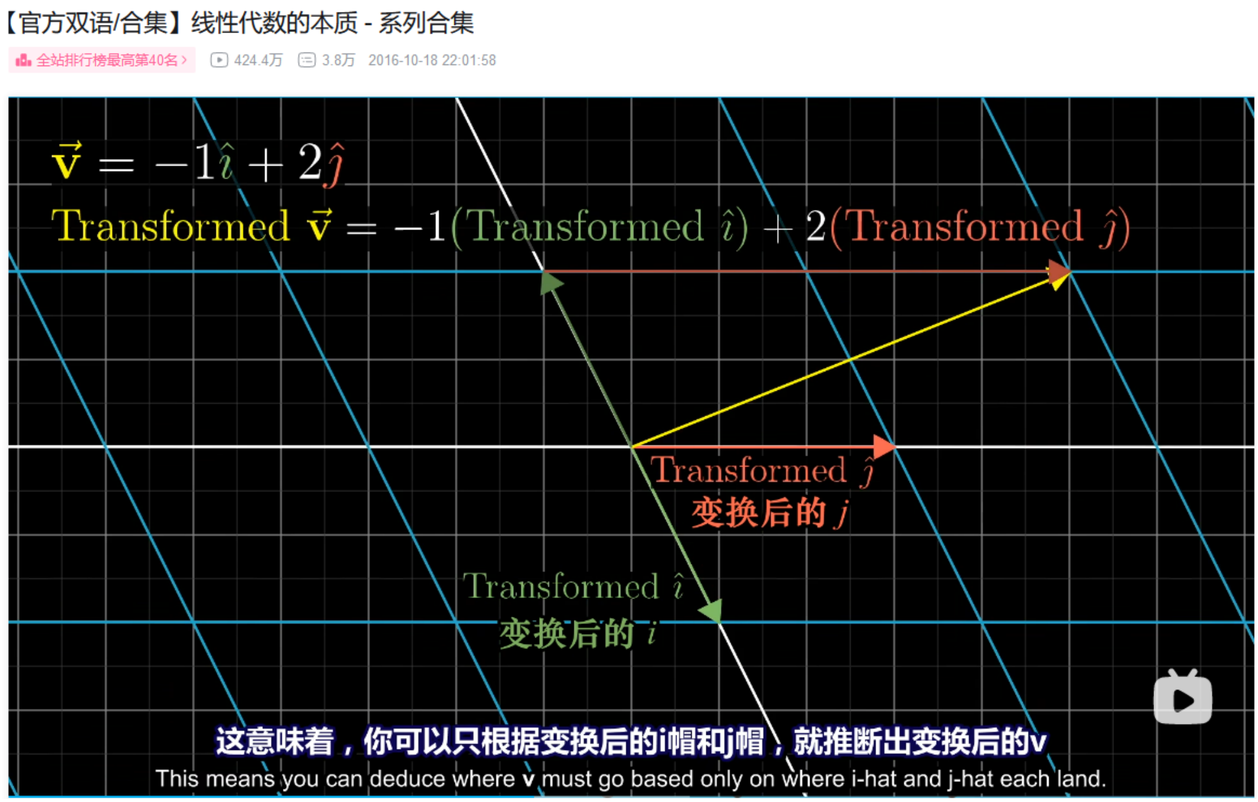

图 3: 行列式是方程组系数

$$\begin{bmatrix} x_{in} \\ y_{in} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{out} \\ y_{out} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} &= -1\widehat{i} + 2\widehat{j} \\ &= -1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1(1) + 2(3) \\ -1(-2) + 2(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$\widehat{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{j} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x + 3y \\ -2x + 0y \end{bmatrix}$$

这里x，y可以看成是系数（常数作为系数时可以乘入矩阵，后面的得数利用矩阵的加法）

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \tag{1}$$

平面线性变换因为是二维空间，所以是一个2*2的矩阵。

这里矩阵放在向量左边，类似一个函数，则逆时针旋转90度，则可以写成

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

对应原来x(1, 0)变成了(0, 1)，y(0, 1)变成了(-1, 0)

举个例子，原矢量yuan=(3, 2), x = 3, y = 2代入(1)

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0+(-2)\\ 3+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}$$

注意，这里可利用矩阵的乘法的法则，但直观理解是x左乘了矩阵的列向量中的左列，y左乘了矩阵的列向量中的右列。

计算后的矢量hou=(-2, 3)

3 矩阵相乘

$$\begin{cases}y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2\\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2\\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2\end{cases}$$

从t1，t2到y1,y2的线性变换则

$$\begin{cases}y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2\\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}\end{pmatrix}$$

因为是一个阵（函数）对一个向量进行影响，所以我选择把右边的阵看成一个一个的向量从左到右排队等着左边的阵进行计算。

把新的向量表示，用线性变换的过程展示。需要用到的矩阵构成，是从左到右的新的基的排列。正是因为原列向量是从上到下述说着原始基的排列。而从上到下的方程排列，正是从左到右的加和新基在原基的投影分量乘以原基下的某个向量所获得。