

拉格朗日四平方和定理

小圆滚滚

拉格朗日四平方和定理已经被证明，其证明基于数论中的几个关键引理和恒等式。以下是证明的主要思路和步骤：

1 定理内容

拉格朗日四平方和定理指出：**任何一个正整数都可以表示为四个整数的平方和**。

2 证明思路

1. **欧拉恒等式** 欧拉发现了一个关键的恒等式：

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) = (ax+by+cz+dw)^2 + (ay-bx+cw-dz)^2 + (az-bw-cx+dy)^2 + (aw+bz-cy-dx)^2$$

这个恒等式表明，如果两个数都能表示为四个平方数之和，那么它们的乘积也可以表示为四个平方数之和。

2. **证明素数可以表示为四个平方数之和**

- **奇素数的性质**：对于任意奇素数 p ，存在整数 x 和 y ，使得 $1 + x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$ ，即 $x^2 + y^2 + 1$ 是 p 的倍数。
- **最小倍数的性质**：假设 m 是最小的正整数，使得 mp 可以表示为四个平方数之和。如果 $m = 1$ ，则 p 本身可以表示为四个平方数之和。
- **递降法**：如果 $m > 1$ ，通过构造新的平方和表达式，可以找到一个更小的正整数 $n < m$ ，使得 np 也可以表示为四个平方数之和。通过递降法，最终可以证明 $m = 1$ ，即 p 本身可以表示为四个平方数之和。

3. **推广到所有正整数** 由于任何正整数都可以分解为素数的乘积，而每个素数都可以表示为四个平方数之和，因此根据欧拉恒等式，任何正整数都可以表示为四个平方数之和。

3 证明的关键点

- **欧拉恒等式**是证明的基础，它允许我们将乘积表示为四个平方数之和。
- **递降法**是证明的关键步骤，通过不断寻找更小的倍数，最终证明任何奇素数都可以表示为四个平方数之和。
- **素数的性质**：对于奇素数 p ，存在整数 x 和 y ，使得 $x^2 + y^2 + 1$ 是 p 的倍数。

通过这些步骤，拉格朗日成功证明了该定理。